

Научная статья

УДК 51.005:581.143:621.72

DOI: 10.25230/2412-608X-2024-1-197-83-93

Цифровая оценка влияния удобрений на урожайность сельскохозяйственных растений

Владимир Георгиевич Григулецкий

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина»
350044, Россия, г. Краснодар, ул. Калинина, 13
gvg-tnc@mail.ru

Аннотация. На основе ранее опубликованных работ проведена цифровая оценка влияния удобрений на урожайность разных сельскохозяйственных растений. Новая методика предполагает использование *коэффициента действия фактора роста*, который численно равен относительной скорости прибавки урожая при увеличении количества удобрений (питательных веществ) в почве. Проведены расчеты для разных природно-климатических условий и разных видов растений. Установлено, что азотные удобрения оказывают более сильное влияние на урожай, чем фосфорные и калийные. Новую методику оценки влияния удобрений на урожайность сельскохозяйственных растений можно использовать для расчета оптимальных доз разных удобрений для разных растений; предлагаемый метод приемлем для определения доз удобрений на основе лабораторных, вегетационных или полевых опытов по величине урожая (роста) конкретного растения в определенных почвенно-климатических условиях. Известные методы расчета доз удобрений для конкретных растений и почвенно-климатических условий, такие как *«расчет доз удобрений по выносу питательных веществ, с учетом свойств почвы»*, не учитывающий содержание подвижных форм элементов удобрений в почве и растениях, а также изменения запаса питательных веществ в почве и др., *«определение доз удобрений на основе данных полевых опытов»*, являются по существу «эвристическими», т. к. опускают физиологические особенности влияния удобрений и других факторов на рост и продуктивность растений. Предлагаемые при этом формулы учитывают только приближенные функциональные связи, полученные из опытных данных. В отличие от известных *метода элементарного баланса определения доз удобрений* или *метода расчета доз*

удобрений по количеству питательных веществ, необходимых для увеличения урожая на 1 ц и др., в предлагаемом методе, *во-первых*, принимается в расчет значение урожая, полученное без удобрения почвы, *во-вторых*, определяется и учитывается максимальное потенциальное значение урожая и, наконец, – запас питательных веществ в почве.

Ключевые слова: удобрения, урожай, растения, факторы роста, коэффициент действия, азот, калий, фосфор, почва, максимальный урожай, минимальный урожай, дифференциальное уравнение, начальные условия, частное решение, общее решение

Для цитирования: Григулецкий В.Г. Цифровая оценка влияния удобрений на урожайность сельскохозяйственных растений // Масличные культуры. 2024. Вып. 1 (197). С. 83–93.

UDC 51.005:581.143:621.72

Digital assessment of fertilizers effect on yield of agricultural plants

Griguletsky V.G., doctor of engineering, professor

Kuban State Agrarian University named after Trubilin I.T.
13 Kalinina str., Krasnodar 350044, Russia
gvg-tnc@mail.ru

Abstract. Based on previously published works, a digital assessment of the effect of fertilizers on the yield of various agricultural plants was carried out. The new technique involves the use of the growth factor action coefficient, which is numerically equal to the relative rate of yield increase with an increase in the amount of fertilizers (nutrients) in the soil. Calculations were carried out for different natural and climatic conditions and different types of plants. It has been established that nitrogen fertilizers have a stronger effect on the yield than phosphorus and potassium fertilizers. A new methodology for assessing the effect of fertilizers on the yield of agricultural plants can be used to calculate the optimal doses of different fertilizers for different plants and a proposed method – for determining doses of fertilizers based on laboratory, growing or field experiments based on the yield (growth) of a particular plant in certain soil and climatic conditions. Known methods for calculating doses of fertilizers for specific plants and soil-climatic conditions, such as ‘calculating doses of fertilizers based on the removal of nutrients, taking into account the properties of the soil’ not accounting the content of mobile forms of fertilizer elements in the soil and plants, as well as changes in the supply nutrients in the soil, etc., ‘determining doses of fertilizers based on data from field experiments’ are essentially “heuristic”. They do not take into account the physiological characteristics of the influence of fertilizers and other factors on plant growth and productivity. The formulas proposed here take into account only approximate functional connections obtained from ex-

perimental data. Unlike the well-known method of elementary balance for determining doses of fertilizers, or the method of calculating doses of fertilizers according to the amount of nutrients required to increase the yield by 1 centner, etc., the proposed method, *firstly*, takes into account the value of the yield obtained without fertilizing the soil, *secondly*, the maximum potential value of the yield is determined and taken into account and, finally, the supply of nutrients in the soil is taken into account.

Key words: fertilizers, yield, plants, growth factors, action coefficient, nitrogen, potassium, phosphorus, soil, maximum yield, minimum yield, differential equation, initial conditions, particular solution, general solution

Введение. В работах Э.А. Митчерлиха [1; 2; 3] показано эффективное применение «закона совокупного действия факторов роста» для оценки действия на урожайность разных сельскохозяйственных растений; в монографии [4], в частности, приведены результаты полевых и вегетационных опытов применения фосфорной кислоты (§ 52, С. 267–273, [4]), действия калийных удобрений на урожай растений (§ 53, С. 273–281, [4]) и т. д.

Изменение прироста урожая (dy) с повышением фактора роста (dx) в «закоме совокупного действия факторов роста» описывается уравнением:

$$\frac{dy}{dx} = c_1(A - y) \quad (1)$$

(уравнение (1), стр. 21, [2]; уравнение (1), стр. 243, [4]),

где y – величина урожая;

x – фактор роста;

A – наивысший урожай;

c_1 – коэффициент действия фактора роста (должен быть величиной постоянной, стр. 25, [2]).

На основе большого количества опытов в сосудах (более 3000 опытов) по методике Э.А. Митчерлиха определены следующие значения разных удобрений для азота, калия и фосфорной кислоты: азот, $c = 0,122$; калий без натрия, $c = 0,33$;

калий с натрием, $c = 0,93$; фосфорная кислота, $c = 0,60$ (стр. 29, [2]).

Решение уравнения (1) принимается в виде:

$$\lg(A - y) = \lg A - cx \quad (2)$$

(соотношение (7), стр. 25, [2]; формула (5), стр. 215, [4]),

или:

$$y = A[1 - 10^{-cx}] \quad (3)$$

(соотношение (6), стр. 215, [4]).

В монографии [4] отмечается, что при значении $c = 0,301$ и $x = 1$ *всегда достигается половина высшего урожая* ([4], стр. 215). По мнению профессора А.Т. Кирсанова [5], «нет другого более ценного метода для определения потребности почвы в удобрениях, чем методика Э.А. Митчерлиха» [1; 2; 3]. В Бюллетене Отдела земледелия Государственного института опытной агрономии ([5], стр. 149–150) отмечается, что при рассмотрении 54 случаев удобрений *овса* в 51 опыте получили совпадение теоретического урожая с фактическим, на *ячмене* из 48 случаев полное согласие результатов получено для 45 опытов. В большинстве результатов лабораторных опытов в сосудах соответствовали данным полевых опытов; наименьшее согласование результатов получено на бедных почвах. Проверая основные положения теории Митчерлиха на опытах в сосудах для *овса*, А.Т. Кирсанов отмечает следующее: *для этой проверки необходимо установить фактические запасы питательных веществ, эквивалентных вносимому удобрению*; трудности установления запасов состоят в недостаточно точной обоснованности выбора коэффициентов для перехода от запасов питательных веществ в сосуде к запасам в самой почве. Митчерлих берет в качестве такого множителя число «2», а для *азота* он устанавливает широкие пределы этого

множителя – от значения 0,5 до значения 4,0, в зависимости от гигроскопичности почвы и ее механического состава; для почв бедных, песчаных используется низкий коэффициент, для почв глинистых принимается высокое значение; неопределенность коэффициентов перехода от опытов в сосудах к результатам полевых опытов для реальной почвы определяет необходимость уточнения и развития теории Э.А. Митчерлиха [1; 2; 3; 4]. В ранее опубликованных нами работах [6; 7; 8] получено обобщение «закона совокупного действия фактора роста» путем учета особенностей роста и развития растений при низких (малых) урожаях (продуктивности).

Новая цифровая модель роста и урожайности сельскохозяйственных растений. Принимаем справедливость следующего утверждения: *урожайность (y) и ее прибавка возрастают при увеличении количества фактора роста (x) пропорционально количеству урожая ($A - y$), не достигшего до максимального предельного значения (A), и возможному значению урожая ($B + y$), выше некоторого минимального значения (B) урожая, и поэтому можно записать основное уравнение:*

$$\left(\frac{1}{B+y}\right)\frac{dy}{dx} = (A-y)k, \quad (4)$$

где k – коэффициент пропорциональности, который можно назвать «*относительным коэффициентом действия фактора роста*».

При разделении переменных [9] можно записать для неопределенного интеграла:

$$\int \frac{dy}{(B+y)(A-y)} = k \int dx. \quad (5)$$

Можно найти соотношение:

$$\frac{1}{(B+y)(A-y)} = \left(\frac{1}{A+B}\right) \left[\left(\frac{1}{B+y}\right) + \left(\frac{1}{A-y}\right) \right], \quad (6)$$

и вычислить интеграл (5) в виде:

$$\ln|B+y| - \ln|A-y| = k(A+B)x + C, \quad (7)$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая по начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad (8)$$

где x_0, y_0 – постоянные значения, определяющие начальное количество фактора роста (x_0) и соответствующий урожай (y_0).

Частное решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям (8), можно записать в виде:

$$\ln \left| \frac{B+y}{B+y_0} \right| - \ln \left| \frac{A-y}{A-y_0} \right| = k(A+B)(x-x_0), \quad (9)$$

или:

$$y = \frac{A(B+y_0)\exp[k(A+B)(x-x_0)] - B(A-y_0)}{(B+y_0)\exp[k(A+B)(x-x_0)] + (A-y_0)}. \quad (10)$$

Коэффициент действия фактора роста (c) можно найти из соотношения (9) в виде:

$$c = k(A+B) = \frac{\ln[(A-y_0)(B+y)] - \ln[(B+y_0)(A-y)]}{x-x_0}. \quad (11)$$

Значение максимального урожая (A) можно найти по фактическим опытными данным или из соотношения:

$$A+B = \frac{2(y_1+B)(y_2+B)(y_3+B) - (y_2+B)^2(y_1+y_3+2B)}{(y_1+B)(y_3+B) - (y_2+B)^2}, \quad (12)$$

где y_1, y_2, y_3 – экспериментальные (опытные) значения урожая (y), установленные через равные интервалы изменения фактора роста (x), т. е. $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ и соответственно $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), y_3 = y(x_3)$.

В практических расчетах целесообразно определять значение коэффициента действия фактора роста (c) на интервале изменения фактора роста (x) от значения $x = x_i$, где $y = y_i = y(x_i)$ до значения $x = x_{i+1}$, где $y = y_{i+1} = y(x_{i+1})$:

$$c = c_i = k_i(A+B) = \frac{\ln[(A-y_{i-1})(B+y_i)] - \ln[(B+y_{i-1})(A-y_i)]}{x_i - x_{i-1}}, \quad (13)$$

и величину урожая соответственно:

$$y = y_i = \frac{A(B+y_{i-1})\exp[c_i(x_i - x_{i-1})] - B(A-y_{i-1})}{(B+y_{i-1})\exp[c_i(x_i - x_{i-1})] + (A-y_{i-1})}. \quad (14)$$

Если планируется (прогнозируется) получить урожай (y) в количестве ($y = y_{\text{пр}}$), то необходимое значение удобрения (x) или фактора роста ($x = x_{\text{пр}}$) можно определить по формуле:

$$x_{\text{пр}} = x_0 + \frac{1}{k(A+B)} \left[\ln\left(\frac{B+y_{\text{пр}}}{B+y_0}\right) - \ln\left(\frac{A-y_{\text{пр}}}{A-y_0}\right) \right]. \quad (15)$$

Количество питательных веществ в почве (x_0) при значении урожая ($y = y_0$) можно определить по формуле:

$$x_0 = \frac{1}{k(A+B)} \left[\ln\left(\frac{A}{A-y_0}\right) - \ln\left(\frac{B}{B+y_0}\right) \right], \quad (16)$$

или:

$$x_0 = \frac{1}{k(A+B)} \left[\ln\left(\frac{A}{A-y_0}\right) + \ln\left(\frac{B+y_0}{B}\right) \right]. \quad (17)$$

Соотношения (13)–(17) являются основными, которые можно использовать при внедрении «цифровых» технологий и выполнении подпрограммы «Цифровое земледелие» [10; 11; 12; 13; 14] в отраслевой программе «Цифровое сельское хозяйство» [15; 16].

Применение новой цифровой методики оценки влияния разных удобрений на урожайность сельскохозяйственных растений

Пример 1. Влияние азота на урожай. Рассмотрим результаты вегетационных опытов Е. Вольфа-Хоэнхейма (E. Wolf-Hohenheim), описанные в монографии Э.А. Митчерлиха ([4], стр. 265, табл. 106) (табл.) 1.

Таблица 1

Результаты опытов Е. Вольфа-Хоэнхейма по влиянию азота на урожай водных культур

№ п/п	Доза азота (x_i), г	Урожай, опыт (y_i), г	Урожай, расчет (y_i), г	Коэффициент действия (c_i)	Урожай, расчет (\bar{y}_i), г
1	0,000	3,36	3,360	–	3,36
2	0,052	9,31	9,310	19,279	9,37
3	0,104	13,99	15,407	14,340	13,86
4	0,156	17,43	17,676	13,187	17,20
5	0,208	19,78	19,736	13,509	19,69
6	0,260	21,19	21,152	14,020	21,55

По формуле (12) находим значение максимального урожая (A) по данным:

$$y_1 = y(0,156) = 17,43; \quad y_2 = y(0,208) = 19,78; \quad y_3 = y(0,260) = 21,19,$$

для которых выполняется условие:

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1, \quad \text{или: } 0,260 - 0,208 = 0,208 - 0,156,$$

$$A + 3,36 = \frac{2(3,36 + 17,43)(3,36 + 19,78)(3,36 + 21,19) - (23,14)^2(45,34)}{(20,79)(24,55) - (23,14)^2},$$

или:

$$A + 3,36 = 26,028; \quad A = 22,668; \quad B = 3,36.$$

По формуле (13) находим коэффициент действия ($c = c_1$) на интервале от $x = x_0 = 0,000$, где $y_0 = 3,36$, до значения $x = x_1 = 0,052$, где $y_1 = 9,31$:

$$c_1 = \frac{\ln[(22,668 - 3,36)(3,36 + 9,31)] - \ln[(3,36 + 3,36)(22,668 - 9,31)]}{0,052 - 0,000},$$

или:

$$c_1 = 19,279.$$

По формуле (14) находим формулу для урожая:

$$y_1(x) = \frac{22,668(3,36 + 3,36)\exp[19,279(x)] - 3,36(22,668 - 3,36)}{(3,36 + 3,36)\exp[19,279(x)] + 19,308},$$

и соответственно значения:

$$y_1(0) = \frac{87,454}{26,028} = 3,360,$$

$$y_1(0,052) = \frac{350,238}{37,621} = 9,310,$$

прогнозное значение урожая для $x = 0,104$ равно:

$$y_1(0,104) = \frac{1066,352}{69,212} = 15,407,$$

и т. д.

Расчетные (прогнозные) количества урожая (y_i) и значения коэффициента действия факторов роста (c_i) приведены в таблице 1 (в последнем столбце таблицы даны значения урожая (\bar{y}_i) по методике Э.А. Митчерлиха [4]). Данные таблицы показывают хорошее соответствие опытных и расчетных (прогнозных) значений урожая водных культур по новой методике расчета (из шести опытных значений четыре совпали с опытными данными, а по методике Э.А. Митчерлиха получено только два совпадения). Вычисленные значения по методике Э.А. Митчерлиха определены по уравнению:

$$\lg(27 - y) = \lg(27 - 3,36) - 2,45x.$$

Среднее значение коэффициента действия (c) по новой цифровой модели равно $\bar{c} = 19,279$, а по методике Э.А. Митчерлиха $c = 2,45$, т. е. в 8 раз меньше.

По формуле (17) определим запас питательных веществ в почве ($x = x_0$) для опытных данных (контроль), когда не использовали удобрения, а получили урожай $y_0 = 3,36$ г:

$$x_0 = \frac{1}{19,279} \left[\ln \left(\frac{22,668}{22,668 - 3,36} \right) + \ln \left(\frac{3,36 + 3,36}{3,36} \right) \right] = 0,044 \text{ г.}$$

По формуле (15) определим количество азотного удобрения ($x = x_{\text{пр}}$) для получения, например, урожая $y = y_{\text{пр}} = 15,0$ г:

$$x_{\text{пр}} = 0,044 + \frac{1}{19,279} \left[\ln \left(\frac{3,36 + 15}{3,36 + 3,36} \right) - \ln \left(\frac{22,668 - 15}{22,668 - 3,36} \right) \right] = 0,144 \text{ г.}$$

Таким образом, запас азотных питательных веществ в почве равен $x_0 = 0,044$ г, и для получения урожая $y_{\text{пр}} = 15,0$ г необходимо всего использовать $x_{\text{пр}} = 0,144$ г азота, т. е. для значения фактора роста (x) можно найти: $x = 0,144 - 0,044$, или $x = 0,100$ г, и для урожая $y(0,100)$ по формуле (14) получить:

$$y(0,100) = \frac{22,668(3,36 + 3,36)\exp(19,279 \cdot 0,100) - 3,36 \cdot 19,308}{(3,36 + 3,36)\exp(19,279 \cdot 0,100) + 19,308},$$

или:

$$y(0,100) = \frac{982,396}{65,508} = 14,997 \approx 15,0 \text{ г,}$$

как и прогнозировалось.

Пример 2. Влияние азота на урожай картофеля. Рассмотрим результаты полевых опытов А. Бидербека (A. Biederbeck), описанные в монографии Э.А. Митчерлиха ([4], стр. 266, табл. 107) (табл. 2).

Таблица 2

Результаты опытов А. Бидербека по влиянию азота на урожай картофеля

№ п/п	Доза азота (x_i), ц/га	Урожай, опыт (y_i), ц/га	Урожай, расчет (\bar{y}_i), ц/га	Коэффициент действия (c_i)	Урожай, расчет (\bar{y}), ц/га
1	0,00	210	210,00	—	210
2	0,40	246	246,00	1,089	246
3	0,60	263	260,05	1,299	262
4	0,80	277	276,99	1,299	276

По формуле (12) находим значение максимального урожая (A) по данным:

$$y_1 = y(0,40) = 246; \quad y_2 = y(0,60) = 263; \quad y_3 = y(0,80) = 277,$$

для которых выполняется условие:

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1, \quad \text{или: } 0,8 - 0,6 = 0,6 - 0,4,$$

$$A + 210 = \frac{2(210+246)(210+263)(210+277) - (473)^2(943)}{(456)(487) - (473)^2},$$

или:

$$A + 210 = 540,938; \quad A = 330,938; \quad B = 210.$$

По формуле (13) находим коэффициент действия ($c = c_1$) на интервале от $x = x_0 = 0,00$, где $y_0 = 210$, до значения $x = x_1 = 0,40$, где $y_1 = 246$:

$$c_1 = \frac{\ln[(330,938 - 210)(210 + 246)] - \ln[(210 + 210)(330,938 - 246)]}{0,40 - 0,00},$$

или:

$$c_1 = 1,089.$$

По формуле (14) находим формулу для урожая:

$$y_1(x) = \frac{330,938(210 + 210)\exp[1,089(x)] - 210(330,938 - 210)}{(210 + 210)\exp[1,089(x)] + 120,938},$$

и соответственно значения:

$$y_1(0,00) = \frac{113596,98}{540,938} = 210,00,$$

$$y_1(0,40) = \frac{189472,4366}{770,212} = 246,00,$$

прогнозное значение урожая для $x = 0,60$ равно:

$$y_1(0,60) = \frac{241758,4113}{928,205} = 260,05,$$

и т. д.

Расчетный (прогнозный) урожай картофеля (y_i) и значения коэффициента дей-

ствия факторов роста (c_i) показаны в таблице 2 (в последнем столбце таблицы приведены значения урожая (\bar{y}_i) по методике Э.А. Митчерлиха [4]). Вычисленные значения по методике Э.А. Митчерлиха определены по уравнению:

$$\lg(425 - y) = \lg(425) - 0,20(x + 1,48).$$

Среднее значение коэффициента действия (c) по новой цифровой модели равно $\bar{c} = 1,229$, а по методике Э.А. Митчерлиха $c = 0,20$, т. е. в 6 раз меньше.

По формуле (17) определим запас питательных веществ в почве ($x = x_0$) для опытных данных (контроль), когда не использовали удобрения, а получили урожай $y_0 = 210$ ц/га:

$$x_0 = \frac{1}{1,089} \left[\ln\left(\frac{330,938}{330,938 - 210}\right) + \ln\left(\frac{210 + 210}{210}\right) \right] = 1,561 \text{ ц/га}.$$

По формуле (15) определим количество азотного удобрения ($x = x_{\text{пр}}$) для получения урожая $y = y_{\text{пр}} = 250$ ц/га:

$$x_{\text{пр}} = 1,561 + \frac{1}{1,089} \left[\ln\left(\frac{210 + 250}{210 + 210}\right) - \ln\left(\frac{330,938 - 250}{330,938 - 210}\right) \right] = 2,013 \text{ ц/га}.$$

Таким образом, запас азотных питательных веществ в почве равен $x_0 = 1,561$ ц/га, и для получения урожая $y_{\text{пр}} = 250$ ц/га необходимо всего использовать $x_{\text{пр}} = 2,013$ ц/га азота, т. е. для значения фактора роста (x) можно найти: $x = 2,013 - 1,561$, или $x = 0,452$ ц/га, и для урожая $y(0,452)$ по формуле (14) получить:

$$y(0,452) = \frac{330,938(210 + 210)\exp(1,089 \cdot 0,452) - 210 \cdot (330,938 - 210)}{(210 + 210)\exp(1,089 \cdot 0,452) + 120,938},$$

или:

$$y(0,452) = \frac{201991,172}{808,040} = 249,977 \approx 250 \text{ ц/га},$$

как и прогнозировалось.

Пример 3. Влияние фосфора на урожай. Рассмотрим результаты 3045 опытов Герике, описанные в монографии Э.А. Митчерлиха ([4], стр. 272, табл. 112) по применению фосфорной кислоты на урожай зерновых (табл. 3).

Таблица 3

Результаты опытов Герике по влиянию фосфора на урожай зерновых (3045 опытов)

№ п/п	Доза P ₂ O ₅ (x _i), ц/га	Урожай, опыт (y _i), ц/га	Урожай, расчет (y _i), ц/га	Коэффициент действия (c _i)	Урожай, расчет (ȳ _i), ц/га
1	0,00	22,8	22,80	–	22,8
2	0,30	25,1	25,10	1,221	25,1
3	0,60	26,1	26,83	0,659	26,5
4	0,90	27,8	26,95	1,445	27,9
5	1,20	28,2	28,97	0,435	28,2

По формуле (12) находим значение максимального урожая: $A = 31,265$ ц/га ($B = 22,8$ ц/га). По формуле (13) находим значения коэффициентов действия (c_i) на разных интервалах изменения дозы удобрений (0,00–0,30), (0,30–0,60), (0,60–0,90), (0,90–1,20) и соответствующие количества урожая по формуле (14); результаты расчетов приведены в таблице 3, где в последнем столбце даны значения урожая зерновых по методике Э.А. Митчерлиха, которые определены по уравнению:

$$\lg(29,4 - y) = \lg(29,4) - 0,6(x + 1,09).$$

Среднее значение коэффициента действия (c) по новой цифровой модели равно $\bar{c} = 0,940$, а по методике Э.А. Митчерлиха $c = 0,60$, т. е. в 1,6 раз меньше.

По формуле (17) определим запас питательных веществ в почве ($x = x_0$) для опытных данных (контроль), когда не использовали удобрения, а получили урожай $y_0 = 22,8$ ц/га:

$$x_0 = \frac{1}{1,221} \left[\ln \left(\frac{31,265}{31,265 - 22,8} \right) + \ln \left(\frac{22,8 + 22,8}{22,8} \right) \right] = 1,638 \text{ ц/га}.$$

По формуле (15) определим количество фосфорного удобрения ($x_{пр}$) для получения, например, урожая $y = y_{пр} = 27,0$ ц/га:

$$x_{пр} = 1,638 + \frac{1}{1,221} \left[\ln \left(\frac{22,8 + 27}{22,8 + 22,8} \right) - \ln \left(\frac{31,265 - 27}{31,265 - 22,8} \right) \right] = 2,272 \text{ ц/га}.$$

Таким образом, запас фосфорных питательных веществ в почве равен $x_0 = 1,638$ ц/га, и для получения урожая $y_{пр} = 27,0$ ц/га необходимо всего использовать $x_{пр} = 2,272$ ц/га фосфора, т. е. для значения фактора роста (x) можно найти: $x = 2,272 - 1,638$, или $x = 0,634$ ц/га, и для урожая $y(0,634)$ по формуле (14) получить:

$$y(0,634) = \frac{31,265(22,8 + 22,8)\exp(1,221 \cdot 0,634) - 22,8 \cdot 8,465}{(22,8 + 22,8)\exp(1,221 \cdot 0,634) + 8,465},$$

или:

$$y(0,634) = \frac{2898,825}{107,356} = 27,001 \text{ ц/га},$$

как и прогнозировалось.

Пример 4. Влияние фосфора на урожай. Рассмотрим результаты 1642 опытов Герике, описанные в монографии Э.А. Митчерлиха ([4], стр. 272, табл. 112) по применению фосфорной кислоты на урожай картофеля (табл. 4).

Таблица 4

Результаты опытов Герике по влиянию фосфора на урожай картофеля (1642 опыта)

№ п/п	Доза P ₂ O ₅ (x _i), ц/га	Урожай, опыт (y _i), ц/га	Урожай, расчет (y _i), ц/га	Коэффициент действия (c _i)	Урожай, расчет (ȳ _i), ц/га
1	0,00	237	237,00	–	237
2	0,30	251	251,00	1,066	253
3	0,60	261	261,69	0,987	263
4	0,90	269	268,71	1,031	270
5	1,20	275	275,04	1,023	274

По формуле (12) находим значение максимального урожая картофеля: $A = 292,476$ ц/га ($B = 237$ ц/га). По формуле (13) находим значения коэффициентов действия (c_i) на разных интервалах изменения дозы фосфорных удобрений (0,00–0,30), (0,30–0,60), (0,60–0,90), (0,90–1,20) и соответствующие расчетные количества

урожая картофеля по формуле (14); результаты расчетов приведены в таблице 4, где в последнем столбце приведены значения урожая картофеля по методике Э.А. Митчерлиха, которые определены по уравнению:

$$\lg (283 - y) = \lg (283) - 0,6(x + 1,34).$$

Среднее значение коэффициента действия фактора роста (c) для фосфорных удобрений по новой цифровой модели равно $\bar{c} = 1,027$, а по методике Э.А. Митчерлиха $c = 0,60$, т. е. в 1,7 раз меньше.

По формуле (17) определим запас питательных веществ в почве ($x = x_0$) для опытных данных (контроль), когда не использовали удобрения, а получили урожай $y_0 = 237$ ц/га:

$$x_0 = \frac{1}{1,066} \left[\ln \left(\frac{292,476}{292,476 - 237} \right) + \ln \left(\frac{237 + 237}{237} \right) \right] = 2,210 \text{ ц/га}.$$

По формуле (15) определим количество фосфорного удобрения ($x_{\text{пр}}$) для получения, например, урожая $y = y_{\text{пр}} = 255$ ц/га:

$$x_{\text{пр}} = 2,210 + \frac{1}{1,066} \left[\ln \left(\frac{237 + 255}{237 + 237} \right) - \ln \left(\frac{292,476 - 255}{292,476 - 237} \right) \right] = 2,613 \text{ ц/га}.$$

Таким образом, запас фосфорных питательных веществ в почве равен $x_0 = 2,210$ ц/га, и для получения урожая $y = y_{\text{пр}} = 255$ ц/га необходимо всего использовать $x_{\text{пр}} = 2,613$ ц/га фосфора, т. е. для значения фактора роста (x) можно найти: $x = 2,613 - 2,210$, или $x = 0,403$ ц/га, и для урожая $y(0,403)$ по формуле (14) получить:

$$y(0,403) = \frac{292,476(237 + 237)\exp(1,066 \cdot 0,403) - 237 \cdot 55,476}{(237 + 237)\exp(1,066 \cdot 0,403) + 55,476},$$

или:

$$y(0,403) = \frac{199882,055}{783,843} = 255,002 \text{ ц/га},$$

как и прогнозировалось.

Пример 5. Влияние калия на урожай. Рассмотрим результаты вегетационных опытов Э.А. Митчерлиха, описанные в монографии [4] (стр. 274, табл. 115) по применению калийных удобрений на урожай красного клевера (табл. 5).

Таблица 5

Результаты опытов Э.А. Митчерлиха по влиянию калия на урожай красного клевера

№ п/п	Доза K_2O (x_i), г	Урожай, опыт (y_i), г	Урожай, расчет (\bar{y}_i), г	Коэффициент действия (c_i)	Урожай, расчет (\bar{y}_i), г
1	0,00	32,8	32,80	—	32,8
2	0,10	37,1	37,10	1,753	37,1
3	0,25	52,7	43,10	5,079	51,6
4	0,60	56,5	69,27	0,702	62,4
5	1,50	66,4	63,71	1,091	67,6
6	2,50	70,7	70,98	0,981	68,0

По формуле (12) находим значение максимального урожая красного клевера: $A = 73,461$ ($B = 32,8$). По формуле (13) находим значения коэффициентов действия (c_i) на разных интервалах изменения дозы калийных удобрений (0,00–0,10), (0,10–0,25), (0,25–0,60), (0,60–1,50), (1,50–2,50) и соответствующие расчетные (прогнозные) количества урожая красного клевера по формуле (14); результаты расчетов приведены в таблице 5, где в последнем столбце приведены значения урожая красного клевера по методике Э.А. Митчерлиха, которые определены по уравнению:

$$\lg (A - y) = \lg (A - a) - 1,33x,$$

где A – наибольший урожай;

a – наименьший урожай;

$c = 1,33$ – коэффициент действия фактора роста для калийных удобрений K_2O).

Среднее значение коэффициента действия фактора роста (c) для калийных удобрений по новой цифровой модели равно $\bar{c} = 1,921$, а по методике Э.А. Митчерлиха $c = 1,33$, т. е. в 1,4 раза меньше.

По формуле (17) определим запас питательных веществ в почве ($x = x_0$) для

опытных данных (контроль), когда не использовали удобрения, а получили урожай $y_0 = 32,8$ г:

$$x_0 = \frac{1}{1,753} \left[\ln \left(\frac{73,461}{73,461 - 32,8} \right) + \ln \left(\frac{32,8 + 32,8}{32,8} \right) \right] = 0,733 \text{ з.}$$

По формуле (15) определим количество калийного удобрения ($x_{\text{пр}}$) для получения, например, урожая $y_{\text{пр}} = 50$ г:

$$x_{\text{пр}} = 0,733 + \frac{1}{1,753} \left[\ln \left(\frac{32,8 + 50}{32,8 + 32,8} \right) - \ln \left(\frac{73,461 - 50}{73,461 - 32,8} \right) \right] = 1,179 \text{ з.}$$

Таким образом, запас калийных питательных веществ в почве равен $x_0 = 0,733$ г, и для получения урожая $y = y_{\text{пр}} = 50$ г необходимо всего использовать $x_{\text{пр}} = 1,179$ г калия, т. е. для значения фактора роста (x) можно найти: $x = 1,179 - 0,733$, или $x = 0,446$ г, и для урожая $y(0,446)$ по формуле (14) получить:

$$y(0,446) = \frac{73,461(32,8 + 32,8)\exp(1,753 \cdot 0,446) - 32,8 \cdot 40,661}{(32,8 + 32,8)\exp(1,753 \cdot 0,446) + 40,661},$$

или:

$$y(0,446) = \frac{9198,265}{184,029} = 49,983 \text{ з,}$$

как и прогнозировалось.

Пример 6. Влияние калия на урожай овса. Рассмотрим результаты опытов, описанные в монографии Э.А. Митчерлиха [4] (стр. 276, табл. 118), на разных почвах Восточной Пруссии (табл. 6).

Таблица 6

Результаты вегетационных опытов Э.А. Митчерлиха по влиянию калия на урожайность овса на почвах Шенбаллена

№ п/п	Доза K_2O (x_i), г	Урожай, опыт (y_i), г	Урожай, расчет (y_i), г	Коэффициент действия (c_i)	Урожай, расчет (\bar{y}), г
1	0,000	17,8	17,80	–	16,5
2	0,108	38,0	38,00	6,659	39,5
3	0,216	58,8	59,32	6,489	56,0
4	0,432	76,5	88,11	3,315	76,4
5	0,648	85,8	88,50	2,415	86,8
6	1,080	97,6	96,46	2,865	95,0

По формуле (12) находим значение максимального урожая овса: $A = 103,233$ г/сосуд ($B = 17,8$). По формуле (13) находим значения коэффициентов действия (c_i) на разных интервалах изменения дозы калийных удобрений (0,00 – 0,108), (0,108 – 0,216), (0,216 – 0,432), (0,432 – 0,648), (0,648 – 1,080) и соответствующие прогнозные количества урожая овса по формуле (14); результаты приведены в таблице 6, где в последнем столбце приведены расчетные значения урожая овса по методике Э.А. Митчерлиха, которые определены по уравнению:

$$\lg(98 - y) = \lg(98) - 1,33(x + 0,06).$$

Среднее значение коэффициента действия фактора роста (c) для калийных удобрений по новой цифровой модели равно $\bar{c} = 4,349$, а по методике Э.А. Митчерлиха $c = 1,33$, т. е. в 3,3 раза меньше.

По формуле (17) определим запас питательных веществ в почве ($x = x_0$) для опытных данных (контроль), когда не использовали удобрения, а получили урожай $y_0 = 20,7$ г:

$$x_0 = \frac{1}{5,825} \left[\ln \left(\frac{103,233}{103,233 - 20,7} \right) + \ln \left(\frac{20,7 + 20,7}{20,7} \right) \right] = 0,157 \text{ з.}$$

По формуле (15) определим количество калийного удобрения ($x_{\text{пр}}$) для получения, например, урожая $y_{\text{пр}} = 50$ г:

$$x_{\text{пр}} = 0,157 + \frac{1}{5,825} \left[\ln \left(\frac{20,7 + 50}{20,7 + 20,7} \right) - \ln \left(\frac{103,233 - 50}{103,233 - 20,7} \right) \right] = 0,324 \text{ з.}$$

Таким образом, запас калийных питательных веществ в почве равен $x_0 = 0,157$ г, и для получения урожая $y = y_{\text{пр}} = 50$ г необходимо всего использовать $x_{\text{пр}} = 0,324$ г калия, т. е. для значения фактора роста (x) можно найти: $x = 0,324 - 0,157$, или $x = 0,167$ г, и для

урожая $y(0,167)$ по формуле (14) получить:

$$y(0,446) = \frac{103,233(20,7 + 20,7)\exp(5,825 \cdot 0,167) - 20,7 \cdot 82,533}{(20,7 + 20,7)\exp(5,825 \cdot 0,167) + 82,533},$$

или:

$$y(0,446) = \frac{9597,065}{192,047} = 49,972 \text{ ц},$$

как и прогнозировалось.

Заключение. В качестве основных выводов можно отметить следующие положения.

1. Для оценки степени влияния разных удобрений на урожай сельскохозяйственных растений предложено использовать значение *коэффициента действия фактора роста*, который численно равен относительной скорости прибавки урожая при равнозначном увеличении количества удобрений (питательных веществ) в почве.

2. Рассмотрены примеры расчетов, иллюстрирующие применение новой цифровой модели роста растений для определения коэффициента действия фактора роста.

3. Проведено определение степени влияния удобрений на урожайность разных сельскохозяйственных растений и установлено, что азотные удобрения оказывают более сильное действие на урожай, чем фосфорные и калийные.

4. Значение коэффициента действия фактора роста зависит от других факторов, потому что рост и развитие растений происходит в разных почвенных и природно-климатических условиях.

Список литературы

1. Mitscherlich E. A., Merrec E. Eine quantitative Stickstoffanalyse für sehr geringe Mengen // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft. – 1909. – Bd. XXXVIII. – Vol. 7. – S. 537–552.

2. Митчерлих Э.А. Потребность почвы в удобрении. Практическое применение в зем-

леделии закона действия факторов роста. – М.-Л.: Госиздат, 1928. – 70 с.

3. Митчерлих Э.А. Определение потребности почвы в удобрении. – М.-Л.: Госиздат, 1931. – 104 с.

4. Митчерлих Э.А. Почвоведение / Перевод с немецкого Э.И. Шконде; под ред. Ф.В. Турчина. – М.: ИЛ, 1957. – 416 с.

5. Кирсанов А.Т. Теория Митчерлиха, ее анализ и практическое применение // Государственный институт опытной агрономии. Бюллетень отдела земледелия. – 1929. – № 23. – 167 с.

6. Григулецкий В.Г. Обобщение закона действия факторов роста и продуктивности растений Э.А. Митчерлиха // Масличные культуры. – 2022. – Вып. 2 (190). – С. 18–29.

7. Григулецкий В.Г. Приближенные цифровые модели роста и продуктивности растений (обзор) // Масличные культуры. – 2022. – Вып. 3 (191). – С. 79–108.

8. Григулецкий В.Г. Приближенные цифровые модели роста и продуктивности сельскохозяйственных растений: монография. – Краснодар: КубГАУ. – 2023. – 294 с.

9. Григулецкий В.Г., Яценко З.В. Высшая математика для экономистов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 640 с.

10. Кирюшин В.И., Иванов А.Л., Козубенко И.С., Савин И.Ю. Цифровое земледелие // Вестник российской сельскохозяйственной науки. – 2018. – № 5. – С. 4–9.

11. Санду И.С., Рыженкова Н.Е., Афонина В.Е., Доцанова А.И. Цифровизация как инструмент инновационного развития АПК // АПК: экономика, управление. – 2018. – № 8. – С. 12–18.

12. Огневцев С.Б. Цифровизация экономики и экономика цифровизации АПК // Международный сельскохозяйственный журнал. – 2019. – № 2. – С. 77–80.

13. Миронова Н.А. Цифровая экономика и цифровые платформы в АПК // Московский экономический журнал. – 2019. – № 7. – С. 19–20.

14. Ушачев И.Г., Колесников А.В. Развитие цифровых технологий в сельском хозяйстве как составная часть аграрной политики // АПК: экономика, управление. – 2020. – № 10. – С. 4–16.

15. Меденников В.И. Моделирование формирования цифровой платформы управления АПК // Экономика сельского хозяйства России. – 2022. – № 7. – С. 83–90.

16. Ведомственный проект «Цифровое сельское хозяйство»: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://mcx.gov.ru/upload/iblock/900/900863fae06c026826a9ee43e124d058.pdf>.

References

1. Mitscherlich E. A., Merrec E. Eine quantitative Stickstoffanalyse für sehr geringe Mengen // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft. – 1909. – Bd. XXXVIII. – Vol. 7. – S. 537–552.

2. Mitcherlikh E.A. Potrebnost' pochvy v udobrenii. Prakticheskoe primeneniye v zemledelii zakona deystviya faktorov rosta. – M.-L.: Gosizdat, 1928. – 70 s.

3. Mitcherlikh E.A. Opredeleniye potrebnosti pochvy v udobrenii. – M.-L.: Gosizdat, 1931. – 104 s.

4. Mitcherlikh E.A. Pochvovedeniye / Perevod s nemetskogo E.I. Shkonde; pod red. F.V. Turchina. – M.: IL, 1957. – 416 s.

5. Kirsanov A.T. Teoriya Mitcherlikha, ee analiz i prakticheskoe primeneniye // Gosudarstvennyy institut opytной agronomii. Byulleten' otdela zemledeliya. – 1929. – № 23. – 167 s.

6. Griguletskiy V.G. Obobshcheniye zakona deystviya faktorov rosta i produktivnosti rasteniy E.A. Mitcherlikha // Maslichnye kul'tury. – 2022. – Vyp. 2 (190). – S. 18–29.

7. Griguletskiy V.G. Priblizhennyye tsifrovyye modeli rosta i produktivnosti rasteniy (obzor) // Maslichnye kul'tury. – 2022. – Vyp. 3 (191). – S. 79–108.

8. Griguletskiy V.G. Priblizhennyye tsifrovyye modeli rosta i produktivnosti sel'skokhozyaystvennykh rasteniy: monografiya. – Krasnodar: KubGAU. – 2023. – 294 s.

9. Griguletskiy V.G., Yashchenko Z.V. Vysshaya matematika dlya ekonomistov. – Rostov-na-Donu: Feniks, 2004. – 640 s.

10. Kiryushin V.I., Ivanov A.L., Kozubenko I.S., Savin I.Yu. Tsifrovoye zemledeliye // Vestnik rossiyskoy sel'skokhozyaystvennoy nauki. – 2018. – № 5. – S. 4–9.

11. Sandu I.S., Ryzhenkova N.E., Afonina V.E., Doshchanova A.I. Tsifrovizatsiya kak in-

strument innovatsionnogo razvitiya APK // APK: ekonomika, upravleniye. – 2018. – № 8. – S. 12–18.

12. Ognitvsev S.B. Tsifrovizatsiya ekonomiki i ekonomika tsifrovizatsii APK // Mezhdunarodnyy sel'skokhozyaystvennyy zhurnal. – 2019. – № 2. – S. 77–80.

13. Mironova N.A. Tsifrovaya ekonomika i tsifrovyye platformy v APK // Moskovskiy ekonomicheskiy zhurnal. – 2019. – № 7. – S. 19–20.

14. Ushachev I.G., Kolesnikov A.V. Razvitiye tsifrovyykh tekhnologiy v sel'skom khozyaystve kak sostavnaya chast' agrarnoy politiki // APK: ekonomika, upravleniye. – 2020. – № 10. – S. 4–16.

15. Medennikov V.I. Modelirovaniye formirovaniya tsifrovoy platformy upravleniya APK // Ekonomika sel'skogo khozyaystva Rossii. – 2022. – № 7. – S. 83–90.

16. Vedomstvennyy proekt «Tsifrovoye sel'skoye khozyaystvo»: [Elektronnyy resurs]. – Rezhim dostupa: <https://mcx.gov.ru/upload/iblock/900/900863fae06c026826a9ee43e124d058.pdf>.

Сведения об авторе

В.Г. Григулецкий, д-р тех. наук, профессор

Получено/Received

28.11.2023

Получено после рецензии/Manuscript peer-reviewed

27.12.2023

Получено после доработки/Manuscript revised

08.02.2024

Принято/Accepted

13.03.2024

Manuscript on-line

30.05.2024