

Научная статья

УДК 631.171:338.43.02

DOI: 10.25230/2412-608X-2023-4-196-25-40

Цифровая оценка содержания питательных веществ в почве и потребность растений в удобрении при депрессии роста

Владимир Георгиевич Григулецкий

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина»
350044, Россия, г. Краснодар, ул. Калинина, 13
gvg-tnc@mail.ru

Аннотация. Изложена новая приближенная цифровая методика расчета содержания питательных веществ в почве. Цифровая модель определения потребности удобрений для сельскохозяйственных растений и содержания питательных веществ в почве определена на основе следующего утверждения: урожайность и ее прибавка возрастают при увеличении количества факторов роста пропорционально количеству урожая, не достигшего предельной потенциальной урожайности, и возможному значению урожая выше некоторого минимального (начального) значения. Впервые изучено (приближенно) влияние депрессии на рост и развитие растений; при этом установлено, что известное решение этого вопроса относительно *второго приближения закона действия факторов роста (теория Бауле-Митчерлиха)* являются *ошибочными*. Рассмотрены примеры расчетов, показывающие соответствие опытных и расчетных значений урожайности для разных условий.

Ключевые слова: почва, удобрения, урожайность, коэффициент действия фактора роста, предельно возможный урожай, опытные данные, расчетные значения, дифференциальное уравнение, начальные условия, частное решение

Для цитирования: Григулецкий В.Г. Цифровая оценка содержания питательных веществ в почве и потребность растений в удобрении при депрессии роста // Масличные культуры. 2023. Вып. 4 (196). С. 25–40.

UDC 631.171:338.43.02

Digital assessment of nutrients in soil and fertilizer needs of plants in growth depression

Griguletsky V.G., doctor of engineering, professor

Kuban State Agrarian University named after Trubilina I.T.

13 Kalinina str., Krasnodar 350044, Russia
gvg-tnc@mail.ru

Abstract. The article outlines a new approximate digital method for calculating the nutrient content in the soil. A digital model for determining the fertilizer needs of agricultural plants and the content of nutrients in the soil is determined on the basis of the following statement: yield and yield increase raise with an increase in the number of growth factors, in proportion to the amount of crop that has not reached the maximum potential yield, and the possible value of the yield above a certain minimum (initial) value. For the first time, the effect of depression on the growth and development of plants has been studied (approximately). At the same time, it was established that the well-known solution to this question regarding the second approximation of the law of action of growth factors (the Baule-Mitscherlich theory) is erroneous. Examples of calculations are considered that show good agreement between the experimental and calculated yield values for different conditions.

Keywords: soil, fertilizers, yield, growth factor action coefficient, maximum possible yield, experimental data, calculated values, differential equation, initial conditions, particular solution

Актуальность проблемы. Необходимость и актуальность разработки цифровой модели роста и продуктивности сельскохозяйственных растений (культур) определена в основных положениях Программы «Цифровая экономика Российской Федерации» [1], где отмечается целесообразность создания условий для развития общества знаний, повышения доступности и качества товаров и услуг, произведенных в цифровой экономике с использованием *современных цифровых технологий*. В частности, в статьях С.Б. Огневцева [2; 3; 4] описаны этапы развития информационных технологий, как-то: автоматизация, информация, цифровизация и т. д. Рассмотрены тенденции и понятия современного этапа цифровизации и сквозные технологии, предлагаемые программой «Цифровая экономика». Обосновывается необходимость создания цифровой плат-

формы АПК как важной составляющей современной цифровой экономики. Целью разработки и развития цифровой платформы АПК является увеличение эффективности работы сельскохозяйственных и агропромышленных предприятий за счет широкого внедрения в производственные процессы новых цифровых, в том числе сквозных, технологий и инновационных бизнес-моделей рыночного взаимодействия этих предприятий на основе модели «Платформа как сервис». Определяются задачи и структура цифровой платформы, в которую входят субплатформы, соответствующие агропродовольственным рынкам, и модули-приложения, служащие для решения различных практических задач. Выделяются и описываются три основные субплатформы. Предлагается последовательность этапов разработки цифровой платформы. Обосновывается экономический эффект внедрения предлагаемой платформы и необходимость государственных вложений в этот проект [2; 3; 4].

В статьях В.И. Меденникова, Ф.И. Ерешко, В.В. Кульбы [5; 6] с системных позиций рассматривается процесс детерминализации появившихся в связи со всеобщей цифровизацией общества новых понятий: «цифровая экосистема», «экосистема цифровой экономики», «цифровая бизнес-экосистема», «цифровая платформенная экосистема» и т. д. Показано, что бизнес-сообщество в погоне за модными словами, уже не обладающими научной точностью, приводит к упрощению заключенных в них понятий, которые в результате теряют строгую концептуальность, системность, однозначность. Многозначность понятий, усиленная такой же неопределенностью трактовки цифровой платформы, представленной десятками определений, ведет к размыванию и запутыванию научного системного подхода к цифровизации управления реальной экономики, к ее дезинтеграции, то есть к огромному числу вариантов развития данного процесса,

препятствующему выполнению основного требования цифровой экономики – максимальной интеграции данных и алгоритмов. Исходя из этого определения и результатов моделирования, рассматриваются методы формирования научно обоснованной цифровой экосистемы агропромышленного комплекса, основу которой составляет единое информационное интернет-пространство цифрового взаимодействия страны, интегрирующего единую цифровую платформу управления производством и единую платформу информационных научно-образовательных ресурсов. Комплексная реализация представленной цифровой экосистемы АПК позволит сократить затраты на выполнение программы цифровой экономики в десятки-сотни раз со значительно большей эффективностью [6].

В работе Н.Н. Сологуб, О.И. Улановой, Н.И. Остробородовой, Д.А. Остробородовой [8] подробно рассматриваются проблемы и перспективы внедрения цифровых технологий в сельское хозяйство Российской Федерации на современном этапе. Проведен анализ состояния аграрного комплекса в контексте инновационного развития. В сельском хозяйстве возрастает необходимость в применении современных технологий, в том числе систем сбора, хранения и обработки данных. Использование IT-технологий способствует повышению урожайности и рентабельности сельского хозяйства, снижению материальных затрат, более эффективному распределению средств. Обозначены основные направления цифровизации аграрного сектора, предусматривающие прохождение нескольких этапов. Выделены приоритетные задачи, реализация которых станет возможна благодаря государственной поддержке и согласованной работе всех заинтересованных участников данного процесса. В настоящее время существуют факторы, препятствующие внедрению цифровых технологий в сельское хозяйство; решению существующих проблем будет спо-

Сравнительный анализ моделей роста и продуктивности растений

№ п/п	Митчерлих Э.А.	Григулецкий В.Г.
1	<i>Основное уравнение</i>	
	$\frac{dy}{dx} = k(A - y)$	$\left(\frac{1}{B + y}\right) \frac{dy}{dx} = c(A - y)$
2	<i>Начальные условия</i>	
	$y(x_0) = y_0$	$y(x_0) = y_0$
3	<i>Частное решение</i>	
	$\lg \left[\frac{(A - y_0)}{(A - y)} \right] = k(x - x_0)$	$\ln \left[\frac{(A - y_0)(B + y)}{(A - y)(B + y_0)} \right] = c(A + B)(x - x_0)$
4	<i>Максимальный урожай</i>	
	$A = \frac{y_2^2 - y_1 \cdot y_3}{2y_2 - y_1 - y_3}$	$A + B = \frac{2(y_0 + y_1)(y_0 + y_2)(y_0 + y_3) - (y_0 + y_2)^2(y_1 + y_3 + 2y_0)}{(y_0 + y_1)(y_0 + y_3) - (y_0 + y_2)^2}$
5	<i>Коэффициент действия фактора</i>	
	$k = \frac{\lg(A - y_1) - \lg(A - y_2)}{x_2 - x_1}$	$c = \frac{\ln[(A - y_0)(B + y)] - \ln[(B + y_0)(A - y)]}{(A + B)(x - x_0)}$
6	<i>Количество питательных веществ в почве</i>	
	$b = \frac{\lg(A) - \lg(A - y_0)}{k}$	$b = \frac{\ln[A(B + y_0)] - \ln[B(A - y_0)]}{(A + B)c}$

способствовать разработке новой аграрной технологической политики, включающей совершенствование нормативно-правовой базы, увеличение государственной финансовой поддержки сельхозпроизводителей, внедрение новых образовательных стандартов обучения высококвалифицированных специалистов для цифрового сельского хозяйства [8].

По мнению авторов работы [8], в условиях глобализации для повышения конкурентоспособности своей продукции Россия должна принять вызовы цифровизации и активно внедрять IT-технологии в сельское хозяйство. Цифровые технологии позволяют контролировать полный цикл растениеводства или животноводства – «умные» устройства измеряют и передают параметры почвы, растений, микроклимата и т. д. Все эти данные с датчиков, дронов и другой техники анализируются специальными программами. Мобильные или онлайн-приложения приходят на помощь фермерам и агрономам, чтобы определить благоприятное время для посадки или сбора урожая, рассчитать схему удобрений, спрогнозировать урожай и многое другое. Внедрение передовых информационных технологий сократит объем ручного труда и расходы, повысив при этом производительность и урожайность [8].

В целом в проанализированных статьях [2; 3; 4; 5; 6; 7; 8] рассмотрены концептуальные вопросы работы цифровой экономики в АПК, поэтому важно разработать математические (цифровые) модели для конкретных процессов и сельскохозяйственных технологий.

В ранее опубликованных статьях [9; 10] получено обобщение математической модели академика Э.А. Митчерлиха [11; 12; 13] для «закона действия факторов роста» без учета депрессии роста растений; чтобы исключить повторения, ниже в таблице 1 приведены показатели сравнительного анализа цифровых моделей роста и продуктивности по работам [11; 12; 13].

Из таблицы 1 видно, что предложенная в работах [9; 10] цифровая модель роста и продуктивности растений является более общей, чем известная модель академика Э.А. Митчерлиха [11; 12; 13].

Основные положения методики Э.А. Митчерлиха по определению потребности почвы в удобрениях. Чтобы исключить разночтения, воспользуемся содержанием работ [11; 12; 13] более детально. Во введении книги [13] ее автор, академик Э.А. Митчерлих специально формулирует проблему *химического анализа почвы* в почвоведении в виде следующего вопроса: задача сводится к определению питательных веществ, имеющих в почве в доступной для растений форме; естественно, важно определить, что именно извлекает растение из почвы и какое количество питательных веществ находится в урожае, это главные вопросы *химического анализа почв*; однако количество питательных веществ, извлекаемых на одной и той же почве разными растениями зависит от влажности почвы, температуры окружающей среды, состава почвы и т. д. *Химический анализ почвы* должен проводиться с учетом физиологии растения химико-

физическими методами для конкретных условий. Определяя *практические рекомендации по оценке потребности почвы в удобрении*, академик Э.А. Митчерлих [12; 13] использует следующее основное положение: *урожай (y) возрастает с увеличением фактора роста (x) пропорционально количеству урожая, недостающего до наивысшего (A), возможного при избытке данного фактора*, поэтому можно записать основное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = (A - y)c \quad (1)$$

(уравнение (1), стр. 510, [11]; уравнение (1), стр. 21, [13]),
где c – коэффициент пропорциональности.

Дифференциальное уравнение первого порядка в обыкновенных производных (1) определяет абсолютную *скорость изменения урожая (y) от действия какого-либо фактора роста (x)*. *Общий интеграл* дифференциального уравнения (1) можно записать в виде:

$$\lg(A - y) = C - cx \quad (2)$$

(соотношение (2), стр. 510, [11]; соотношение (2), стр. 22, [13]),
где C – постоянная интегрирования.

В книге [13] специально отмечается, что *при полном отсутствии питательных веществ (т. е. когда $x = 0$, урожай $y = 0$)*, можно записать соотношения:

$$\lg(A - 0) = C - c \cdot 0$$

или:

$$\log A = C,$$

и получить *частное решение* основного уравнения:

$$\lg(A - y) = \log A - cx \quad (3)$$

(соотношение (3), стр. 22, [13]),
где c – коэффициент действия какого-либо питательного вещества почвы или удобрения, а произведение (cx) пропорционально повышению урожая, и если

при (x) некоторого питательного вещества получается урожай (y), то (x) тем больше, чем меньше коэффициент (c), и, наоборот, поэтому можно записать *частное решение* основного дифференциального уравнения (1) в виде:

$$y = A(1 - e^{-cx}) \quad (4)$$

(соотношение (4), стр. 22, [13]).

В случае, *когда почва еще до внесения в нее удобрения сама по себе обеспечивает некоторый урожай растений (a)*, то можно принять:

$$x = 0, \quad y = a$$

и найти соотношения:

$$\lg(A - a) = C - c \cdot 0$$

или:

$$C = \lg(A - a),$$

или:

$$\lg(A - y) = \lg(A - a) - cx \quad (5)$$

(соотношение (7), стр. 24, [13]),
где a – урожай, который обусловлен тем, что в самой почве, еще до внесения в нее данного питательного вещества (x), находилось некоторое его количество ($x = b$), и можно записать соотношение:

$$\log(A - a) = \log(A) - cb \quad (6)$$

и найти формулу:

$$\log(A - y) = \log(A) - c(x + b) \quad (7)$$

(соотношение (9), стр. 24 [13]).
Таким образом, увеличивая одно из питательных веществ (x) и оставляя все остальные факторы постоянными, *опытным путем можем определить количество данного питательного вещества (b) в почве, используя данные об урожайности для конкретного растения и почвы*: пусть с неудобренной почвы получен некоторый урожай (y_0), соответствующий запасу (b) некоторого питательного веще-

ства, и поэтому можно записать соотношения:

$$\begin{cases} \log(A - y_0) = \log(A) - cb, \\ \log(A - y) = \log(A) - c(x + b), \end{cases}$$

из которых следует:

$$\log(A - y_0) - \log(A - y) = cx, \quad (8)$$

или:

$$A = \frac{y_0 - ky}{1 - k} \quad (9)$$

($k = e^{cx}$)

(соотношение (10), стр. 25, [13]),

и найти соотношение:

$$b = \frac{\lg(A) - \lg(A - y_0)}{c} \quad (10)$$

(формула (10), стр. 25, [13]),

которое определяет запас питательных веществ в почве, используя данные об урожайности для конкретных природных условий и определенных сельскохозяйственных растений.

Главным недостатком методики Э.А. Митчерлиха [12; 13; 14] является то обстоятельство, что основное дифференциальное уравнение (1), его частное решение (4) и основная формула (10), определяющая запас питательных веществ в почве, получены на основе предположения, что кривая роста $y(x)$ и убывания рентабельности последовательных доз удобрений всюду выпукла. Профессор В. Н. Перегудов в критической статье [15] специально отмечает, что постоянная выпуклость кривой роста не наблюдалась в 30 % результатов (563 опыта) полевых опытов; в 171 опыте наблюдалась обратная зависимость – кривая роста имела вогнутый характер, а чаще всего – 40 % результатов – опытные кривые роста имеют сначала вогнутый участок, а затем выпуклый участок, при-

ближаясь к некоторому максимальному значению.

Новая цифровая модель оценки запаса питательных веществ в почве. Принимаем справедливость следующего утверждения: урожайность (y) и ее прибавка возрастают при увеличении количества фактора роста (x) и пропорциональны количеству урожая ($A - y$), не достигшего максимального предельного значения (A) и возможному значению урожая ($B + y$, выше некоторого минимального (начального) значения (B) урожая, и поэтому можно записать основное уравнение:

$$\left(\frac{1}{B + y} \right) \frac{dy}{dx} = (A - y)k, \quad (11)$$

где k – коэффициент пропорциональности, или:

$$\frac{dy}{dx} = k(A - y)(B + y). \quad (12)$$

Сравнивая уравнения (1) (Э.А. Митчерлих), (11) и (12), можно отметить, что используемое дифференциальное уравнение первого порядка в обыкновенных производных (11) определяет относительную скорость изменения урожая (y) от действия какого-либо фактора роста (x). Общий интеграл дифференциального уравнения (11) можно записать в виде:

$$\ln(A - y) - \ln(B + y) = C - k(A + B)x, \quad (13)$$

где C – постоянная интегрирования; $c = k(A + B)$ – коэффициент действия какого-либо питательного вещества почвы или удобрения.

При полном отсутствии питательных веществ в почве ($x = 0$), можно принять $y = 0$ и записать соотношение:

$$\ln(A) - \ln(B) = C \quad (14)$$

и получить «частное решение» уравнения (11) в виде:

$$\ln\left(\frac{A}{A-y}\right) + \ln\left(\frac{B+y}{B}\right) = cx \cdot \quad (15)$$

Для решения основного дифференциального уравнения (11) можно назначить «начальные» условия:

$$y(x_0) = y_0, \quad (16)$$

где x_0, y_0 – постоянные параметры, определяющие соответственно «начальное» значение фактора роста (x_0) и «начальное» значение урожая (y_0).

Решение основного дифференциального уравнения (11), удовлетворяющее начальным условиям (16), можно записать в виде:

$$y(x) = \frac{A(B+y_0)\exp[k(A+B)(x-x_0)] - B(A-y_0)}{(B+y_0)\exp[k(A+B)(x-x_0)] + (A-y_0)}. \quad (17)$$

Значение коэффициента (A) можно найти по формуле:

$$A+B = \frac{2(y_1+B)(y_2+B)(y_3+B) - (y_2+B)^2(y_1+y_3+2B)}{(y_1+B)(y_3+B) - (y_2+B)^2}, \quad (18)$$

где y_1, y_2, y_3 – экспериментальные (опытные) значения урожая, установленные через равные интервалы изменения фактора роста (x), т. е. $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ и соответственно $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), y_3 = y(x_3)$.

Если с *неудобренной почвы* получен некоторый урожай ($y_{\text{ну}}$), соответствующий некоторому запасу питательных веществ ($x = x_{\text{ну}}$), то из формулы (15) можно получить соотношение:

$$x_{\text{ну}} = b = \frac{\ln(A) - \ln|A - y_{\text{ну}}| + \ln|B + y_{\text{ну}}| - \ln(B)}{c} \quad (19)$$

или:

$$x_{\text{ну}} = b = \left(\frac{1}{c}\right) \left[\ln\left(\frac{A}{A-y_{\text{ну}}}\right) + \ln\left(\frac{B+y_{\text{ну}}}{B}\right) \right] \quad (20)$$

Формулы (19) (или (20)) определяют запас питательных веществ в почве. Сравнивая соотношения (1) (Э.А. Митчерлих) и (11) (предлагаемая), (2) (Э.А. Митчерлих) и (12) (предлагаемая), (3) (Э.А. Мит-

черлих) и (15) (предлагаемая), (4) (Э.А. Митчерлих) и (17) (предлагаемая), можно отметить, что в методике Э.А. Митчерлиха *не учитывается возможное значение урожая ($B + y$) выше некоторого минимального (начального) значения (B)*. По существу в методике Митчерлиха не учитывается влияние малого количества (или отсутствие) питательных веществ (удобрений) на величину урожая растения. Можно отметить, что формула (17) определяет кривую роста урожайности, у которой, в частном случае, имеются выпуклый и вогнутый участки в отличие от формулы (4) (Э.А. Митчерлих), которая всюду выпукла, что часто не подтверждается в экспериментах (опытах). Значение коэффициента действия фактора роста (k) при этом необходимо определять по формуле для каждого интервала:

$$k_i = \frac{\ln[(A-y_0)(B+y_i)] - \ln[(B+y_0)(A-y_i)]}{(A+B)(x_i - x_{i-1})}. \quad (21)$$

Применение новой методики оценки запаса питательных веществ в почве.

Пример 1. Рассмотрим опытные данные о влиянии фосфорных удобрений (x) на урожайность овса (y), полученные в опытах Э.А. Митчерлиха и представленные в таблице II (табл. II, стр. 541, [11]); именно относительно этих данных в статье [11] из условия $y = 0$ из уравнения $\lg(94,6 - y) = 1,9613 - 0,258x$ по методике Э.А. Митчерлиха получена потребность питательных веществ без удобрения ($x = b$) при урожае $y_{\text{ну}} = 3,1$ г на сосуд: $b = 0,056$ г ([11], стр. 541) (табл. 2).

Таблица 2

Урожайность овса (y) в зависимости от количества фосфорных удобрений (x) в опытах Э.А. Митчерлиха (табл. II, стр. 541, [11])

Показатель	№ п/п				
	1	2	3	4	5
Доза удобрения, г	0,00	0,10	0,25	0,50	1,00
Урожай (опыт), г	3,1	8,40	15,8	26,6	44,1
Урожай (расчет), г (Э. А. Митчерлих)	–	8,4	15,0	25,0	44,1

Отметим, что для опытных данных из таблицы 2 в статье [11] получено уравнение:

$$\lg(94,6 - y) = 1,9613 - 0,258 x.$$

Расчетные значения урожая овса (y) при разных дозах фосфора (x) приведены в четвертой строке таблицы 2, и специально отмечается, что для $y = 0$ получено значение $b = x = 0,056$ г, которое определяет потребность питательных веществ в опытном сосуде.

Воспользуемся новой методикой расчета; из данных таблицы 2 используем значения:

$$y(x_0) = 3,1; \quad y(x_1) = 8,40; \quad y(x_2) = 15,8; \\ y(x_3) = 26,6; \quad y(x_4) = 44,1; \\ x_0 = 0,0; \quad x_1 = 0,10; \quad x_2 = 0,25; \quad x_3 = 0,50; \quad x_4 = 1,00.$$

По формуле (18) находим максимально возможное значение урожая (A):

$$A + B = \frac{2(8,4 + 8,4)(8,4 + 26,6)(8,4 + 44,1) - (8,4 + 26,6)^2(8,4 + 44,1 + 16,8)}{(8,4 + 8,4)(8,4 + 44,1) - (8,4 + 26,6)^2}$$

или:

$$A + 8,4 = 67,5; \quad A = y_{\max} = 59,1 \text{ г.}$$

По формуле (21) определяем коэффициент действия фактора (c_1) на интервале изменения от $x_1 = 0,00$ г до $x_2 = 0,10$ г, где $y(x_1) = 3,1$ г и $y(x_2) = 8,4$ г:

$$c_1 = \frac{\ln[(59,1 - 3,1)(8,4 + 8,4)] - \ln[(8,4 + 3,1)(59,1 - 8,4)]}{(59,1 + 8,4)(0,10 - 0,00)} = 0,070883,$$

и находим значение k_1 :

$$k_1 = c_1(A + B) = 0,070883(59,1 + 8,4) = 4,784576.$$

По формуле (19) (или (20)) находим потребность питательных веществ ($x_{\text{ну}}$) в почве в одном сосуде для условий опытов Э.А. Митчерлиха [11]:

$$x_{\text{ну}} = \frac{1}{4,784576} \left[\ln\left(\frac{59,1}{59,1 - 3,1}\right) + \ln\left(\frac{8,4 + 3,1}{8,4}\right) \right] = 0,0769 \text{ г.}$$

Пример 2. Рассмотрим опытные данные Леммермана о влиянии азота (x) на урожайность (y) яровой ржи; эти результаты приведены в книге А.Т. Кирсанова ([16], стр. 77, табл. 5 (табл. 3)).

Урожайность яровой ржи (y) в зависимости от азотных удобрений (x) в опытах Леммермана (табл. 5, стр. 77, [16])

Показатель	№ п/п				
	1	2	3	4	5
Доза удобрения, ц/га	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80
Урожай (опыт), ц/га	32,7	39,8	45,4	51,7	52,6
Урожай (расчет), Митчерлих	–	39,1	45,2	50,9	56,3
Урожай (расчет), Леммерман	–	39,7	45,4	49,8	53,3

Для опытных данных Э. А. Митчерлих получил уравнение:

$$\lg(150 - y) = 2,0693 - 0,122 x.$$

Расчетные значения урожая ржи (y) при разных значениях азота (x) по этому уравнению приведены в четвертой строке таблицы 3. Леммерман для опытных данных получил уравнение:

$$\lg(67 - y) = 1,5350 - 0,5 x.$$

Расчетные значения урожая ржи (y) при разных значениях азота (x) по этому уравнению приведены в последней (пятой) строке таблицы 3; оба уравнения определили расчетные значения урожая ржи с высокой точностью относительно экспериментальных данных. Но можно отметить значительное различие максимального урожая $A = 150$ ц/га (Митчерлих) и $A = 67$ ц/га (Леммерман), также значительно различаются «коэффициенты действия факторов роста» $c = 0,122$ (Митчерлих) и $c = 0,500$ (Леммерман), что свидетельствует о необходимости уточнения и дальнейшего развития теории Э.А. Митчерлиха.

Воспользуемся следующими данными из таблицы 3:

$$y_0 = 32,7; \quad y(x_1) = 39,8; \quad y(x_2) = 45,4; \quad y(x_3) = 51,7; \quad y(x_4) = 52,6; \\ x_0 = 0,0; \quad x_1 = 0,20; \quad x_2 = 0,40; \quad x_3 = 0,60; \quad x_4 = 0,80.$$

По формуле (18) находим максимально возможное значение урожая (A):

$$A + B = \frac{2(45,4 + 39,8)(51,7 + 39,8)(52,6 + 39,8) - (51,7 + 39,8)^2(45,4 + 52,6 + 79,6)}{(45,4 + 39,8)(52,6 + 39,8) - (51,7 + 39,8)^2}$$

или:

$$A + 39,8 = 92,54 \text{ ц/га}; \quad A = y_{\max} = 52,74 \text{ ц/га}.$$

По формуле (21) определяем коэффициент действия фактора роста (c_1) на интервале изменения от $x_1 = 0,00$ до $x_2 = 0,20$, где $y(x_1) = 32,7$ ц/га и $y(x_2) = 39,8$ ц/га:

$$c_1 = \frac{\ln[(52,74 - 32,7)(39,8 + 39,8)] - \ln[(39,8 + 32,7)(52,74 - 39,8)]}{(52,74 + 39,8)(0,20 - 0,00)} = 0,028681$$

и находим значение k_1 :

$$k_1 = c_1(A + B) = 0,028681(52,74 + 39,8) = 2,654171.$$

По формуле (19) (или (20)) находим потребность питательных веществ ($x_{\text{нп}}$) в почве для условий экспериментов Леммермана:

$$x_{\text{нп}} = \frac{1}{2,654171} \left[\ln\left(\frac{52,74}{52,74 - 32,7}\right) + \ln\left(\frac{39,8 + 32,7}{39,8}\right) \right] = 1,0509 \text{ ц/га}.$$

Если использовать методику Э.А. Митчерлиха, то по формуле (10) можно найти значение:

$$b = \frac{\lg(150) - \lg(150 - 32,7)}{0,122} = 0,875 \approx 0,9 \text{ ц/га},$$

т. е. на 16,8 % меньше, чем по новой методике.

Пример 3. Рассмотрим опытные результаты изучения агротехники возделывания новых сортов риса при реакции на землях Краснодарского края [17]. Опыты проведены в 2019 г. на полях учхоза «Кубань», норма высева семян составляла 7,0 и 3,5 млн шт/га, ширина междурядий была 15,0 и 30,0 см, глубина заделки семян – 1,0–2,0 см и 4,0–6,0 см. Посев проводили сеялкой СН-16 по одному проходу каждого сорта, где нарезали 15 равных частей, на общем фоне предпосевного внесения карбамида (N_{92}) дополнительно вносили карбамид вручную через каждые 12 дней после посева, таким образом, получили семь вариантов и контрольный вариант (без подкормки). В опытах установлены оптимальные сроки подкормки 32

для пяти сортов риса (Ежик, Ивушка М., Ивушка Б., Светлана, Хазар), часть опытных данных приведена (табл. 5, стр. 176, [17]) (табл. 4).

Таблица 4

Урожайность сортов риса при оптимальных сроках подкормки, ц/га

Показатель	Вариант					Сорт риса
	1	2	3	4	5	
Доза, ц/га	0	38	43	46	55	–
Урожай, ц/га	98,9	120,9	121,4	121,5	121,5	Ежик

Из данных таблицы 4 используем следующие результаты:

$$y_0 = 98,9; \quad y(x_1) = 120,9; \quad y(x_2) = 121,4; \\ y(x_3) = 121,5; \quad y(x_4) = 121,5;$$

$$x_0 = 0,0; \quad x_1 = 38; \quad x_2 = 43; \quad x_3 = 46; \\ x_4 = 55;$$

$$A = y_{\max} = 121,5 \text{ ц/га}; \quad B = y_{\min} = 120,9 \text{ ц/га}.$$

По формуле (21) определяем коэффициент действия фактора роста (k_1) на интервале изменения от $x_0 = 0,00$, где $y_0(0) = 98,9$ ц/га до $x_1 = 38,00$ ц/га и $y_1(38) = 120,9$ ц/га:

$$k_1 = \frac{\ln[(121,5 - 98,9)(120,9 + 120,9)] - \ln[(120,9 + 98,9)(121,5 - 120,9)]}{(121,5 + 120,9)(38 - 0)} = 0,000530$$

и находим значение (c_1):

$$c_1 = k_1(A + B) = 0,128471.$$

По формуле (19) (или (20)) находим потребность питательных веществ в почве ($x_{\text{нп}}$) для условий опытов авторов работы [17]:

$$x_{\text{нп}} = \frac{1}{0,128471} \left[\ln\left(\frac{121,5}{121,5 - 98,9}\right) + \ln\left(\frac{120,9 + 98,9}{120,9}\right) \right] = 17,75 \text{ ц/га}.$$

Пример 4. Воспользуемся результатами опытов Э.А. Митчерлиха, в которых изучалось определение содержания питательных веществ в почве и потребность почвы в удобрении ([14], стр. 221–234). В опытах использовалось девять сосудов, которые наполнялись равным количеством одинаковой почвенно-песчаной смеси; к этой смеси в качестве общего фона

добавляли 1,5 г сухой углекислой и 1,2 г раствора азота в форме нитрата аммония, 1,0 г кристаллического сульфата магния, 0,5 г хлористого натрия. Результаты опытов приведены в таблице 5 (табл. 76, стр. 223, [14]).

Таблица 5

Результаты опытов и вычислений на почвенно-песчаной смеси для урожайности картофеля

Количество К ₂ O, г	Почва : песок = 0 : 5		Почва : песок = 1 : 4		Почва : песок = 2 : 3		Почва : песок = 3 : 2		Почва : песок = 4 : 1	
	найде-но	вычис-лено	найде-но	вычис-лено	найде-но	вычис-лено	найде-но	вычис-лено	найде-но	вычис-лено
0,00	6,4 ± 2,9	10,8	55,0 ± 1,7	55,1	66,7 ± 1,3	68,8	70,6 ± 0,5	72,5	73,0 ± 2,5	74,6
0,10	29,1 ± 2,0	28,0	56,4 ± 4,7	59,9	68,7 ± 0,2	70,2	73,1 ± 1,3	72,9	74,6 ± 1,1	74,7
0,25	44,7 ± 2,4	45,7	64,6 ± 0,7	64,7	69,9 ± 0,8	71,6	74,2 ± 0,5	73,3	75,3 ± 0,8	74,8
0,50	62,7 ± 1,0	61,9	68,3 ± 0,8	69,2	73,6 ± 0,5	72,9	75,6 ± 0,6	73,7	76,0 ± 1,4	74,9
1,00	70,2 ± 2,6	73,0	73,6 ± 2,0	72,2	75,7 ± 1,7	73,8	77,1 ± 0,6	73,9	78,7 ± 1,8	75,0
<i>A</i>		76,0		73,0		74,0		74,0		75,0

В таблицах 6–10 приведены результаты опытов и вычислений на почвенно-песчаной смеси разного состава для урожайности картофеля по новой методике.

Таблица 6

Результаты опытов и вычислений урожайности картофеля на почвенно-песчаной смеси (почва : песок ≡ 0 : 5; A = 70,39; B = 6,4) по новой методике (3 столбец) и методике Э.А. Митчерлиха (4 столбец)

№ п/п	Опыт (x _i)	Опыт (y _i)	Расчет (y _i)	Расчет (y _i)	Расчет (c _i)
	номер столбца				
	1	2	3	4	5
1	0,00	6,4	6,40	10,8	–
2	0,10	29,1	29,10	28,0	0,1899
3	0,25	44,7	61,52	45,7	0,0728
4	0,50	62,7	61,90	61,9	0,0785
5	1,00	70,2	69,97	73,0	0,0991

По формуле (19) (или (20)) находим запас питательных веществ (x_{нy}) в почве по данным таблицы 6:

$$x_{ny} = \frac{1}{(76,79) \cdot 0,1899} \left[\ln \left(\frac{70,39}{70,39 - 6,4} \right) + \ln \left(\frac{6,4 + 6,4}{6,4} \right) \right] = 0,0541 \text{ г/сосуд}$$

Таблица 7

Результаты опытов и вычислений урожайности картофеля на почвенно-песчаной смеси (почва : песок ≡ 1 : 4; A = 76,52; B = 55,0) по новой методике (3 столбец) и методике Э.А. Митчерлиха (4 столбец)

№ п/п	Опыт (x _i)	Опыт (y _i)	Расчет (y _i)	Расчет (y _i)	Расчет (c _i)
	номер столбца				
	1	2	3	4	5
1	0,00	55,0	55,00	55,1	–
2	0,10	56,4	56,40	59,9	0,0061
3	0,25	64,6	58,36	64,7	0,0030
4	0,50	68,3	71,86	69,2	0,0122
5	1,00	73,0	72,71	72,2	0,0164

По формуле (19) (или (20)) находим запас питательных веществ (x_{нy}) в почве по данным таблицы 7:

$$x_{ny} = \frac{1}{(131,52) \cdot 0,0061} \left[\ln \left(\frac{76,52}{76,52 - 55} \right) + \ln \left(\frac{55 + 55}{55} \right) \right] = 2,4452 \text{ г/сосуд}$$

Таблица 8

Результаты опытов и вычислений урожайности картофеля на почвенно-песчаной смеси (почва : песок ≡ 2 : 3; A = 76,56; B = 66,7) по новой методике (3 столбец) и методике Э.А. Митчерлиха (4 столбец)

№ п/п.	Опыт (x _i)	Опыт (y _i)	Расчет (y _i)	Расчет (y _i)	Расчет (c _i)
	номер столбца				
	1	2	3	4	5
1	0,00	66,7	66,7	68,8	–
2	0,10	68,7	68,7	70,2	0,0169
3	0,25	69,9	70,99	71,6	0,0081
4	0,50	73,6	71,52	72,9	0,0234
5	1,00	75,7	75,99	73,8	0,0175

По формуле (19) (или (20)) находим запас питательных веществ (x_{нy}) в почве по данным таблицы 8:

$$x_{ny} = \frac{1}{(143,26) \cdot 0,0169} \left[\ln \left(\frac{76,56}{76,56 - 66,7} \right) + \ln \left(\frac{66,7 + 66,7}{66,7} \right) \right] = 1,1328 \text{ г/сосуд}$$

Таблица 9

Результаты опытов и вычислений урожайности картофеля на почвенно-песчаной смеси (почва : песок ≡ 3 : 2; A = 77,71; B = 70,6) по новой методике (3 столбец) и методике Э.А. Митчерлиха (4 столбец)

№ п/п	Опыт (x _i)	Опыт (y _i)	Расчет (y _i)	Расчет (y _i)	Расчет (c _i)
	номер столбца				
	1	2	3	4	5
1	0,00	70,6	70,60	72,5	–
2	0,10	73,1	73,10	72,9	0,0304
3	0,25	74,2	75,33	73,3	0,0126
4	0,50	75,6	75,49	73,7	0,0140
5	1,00	77,1	76,96	73,9	0,0169

По формуле (19) (или (20)) находим запас питательных веществ (x_{ny}) в почве по данным таблицы 9:

$$x_{ny} = \frac{1}{(148,31) \cdot 0,0304} \left[\ln \left(\frac{77,71}{77,71 - 70,6} \right) + \ln \left(\frac{70,6 + 70,6}{70,6} \right) \right] = 0,6842 \text{ г/сосуд.}$$

Таблица 10

Результаты опытов и вычислений урожайности картофеля на почвенно-песчаной смеси (почва : песок $\equiv 4 : 1$; $A = 98,86$; $B = 73,0$) по новой методике (3 столбец) и методике Э.А. Митчерлиха (4 столбец)

№ п/п	Опыт (x_i)	Опыт (y_i)	Расчет (y_i)	Расчет (y_i)	Расчет (c_i)
	номер столбца				
	1	2	3	4	5
1	0,00	73,0	73,00	74,6	–
2	0,10	74,6	74,60	74,7	0,0044
3	0,25	75,3	76,81	74,8	0,0013
4	0,50	76,0	76,43	74,9	0,0008
5	1,00	78,7	77,35	75,0	0,0017

По формуле (19) (или (20)) находим запас питательных веществ (x_{ny}) в почве по данным таблицы 10:

$$x_{ny} = \frac{1}{(171,86) \cdot 0,044} \left[\ln \left(\frac{98,86}{98,86 - 73,0} \right) + \ln \left(\frac{73,0 + 73,0}{73,0} \right) \right] = 0,2690 \text{ г/сосуд.}$$

Из данных таблиц 6–10 (столбцы 3, 4) видно, что во всех вариантах результаты расчетов по новой методике значительно ближе к опытным значениям, чем результаты вычислений по методике Э.А. Митчерлиха.

Цифровая оценка потребности растений в удобрении при депрессии роста. «Закон действия факторов роста» имеет вполне определенные пределы применения: при использовании большого количества какого-нибудь фактора роста (например, высокие дозы растворимых удобрений) урожай уменьшается; при большом количестве питательных веществ в почве нельзя получить высокий урожай, т. к. происходят повреждения стеблей и листьев растений из-за большой концентрации питательного вещества (раствора) в почве, а в концентрированном растворе солей не может расти ни одно растение.

Академик Э.А. Митчерлих совместно с профессором Б. Бауле при обработке опытных данных установили, что каждый из действующих факторов роста, влияющих на рост и развитие растения, имеет оптимальное значение, за которым следует угнетение роста и урожайности, т. е. происходит *депрессия* развития растения, поэтому в основное уравнение была введена «поправка на депрессию» [14; 16]. Поправка на депрессию определяет «второе приближение» закона действия факторов роста Митчерлиха.

В книге А.Т. Кирсанова ([16], стр. 69) специально отмечается, что «несмотря на всю стройность, изящность и убедительность этих выводов с математической стороны», все же их нельзя признать достаточными для наших целей без предварительной проверки в наших опытах. Анализ полученных опытных данных свидетельствует о необходимости уточнения и развития основных положений этой теории. Сущность депрессии развития растений академик Э.А. Митчерлих показывает на процессе роста овса при недостатках калийных удобрений и высоких дозах других удобрений. «Второе приближение» особенно ценно для тех вариантов, когда используются «односторонние» удобрения, например, применяются калийные удобрения на фоне разных доз азотистых удобрений. В качестве примера в таблице 11 приведен фактический урожай общей массы зерна и соломы при разных количествах азота (г/сосуд) в опытах Э.А. Митчерлиха.

Первое приближение закона действия факторов роста для данных таблицы 1 определено по формуле:

$$y_1(x) = 158,5 \left[1 - 10^{-0,396(x+0,025)} \right].$$

Второе приближение определялось по формуле:

$$y_2(x) = 158,5 \left[1 - 10^{-0,396(x+0,025)} \right] \cdot 10^{-0,011(x+0,025)^2}$$

Можно, однако, отметить, что данные столбцов 3 и 4 в таблице 11 различаются

значительно, что свидетельствует о необходимости уточнения теоретической части «второго приближения» закона действия факторов роста.

Таблица 11

Общий урожай овса в зависимости от доз азотных удобрений

Количество азота на сосуд в г	Общий урожай в граммах		
	полученный Виссманом урожай	вычисленный урожай по 2-му приближению	вычисленный урожай по 1-му приближению
0,000	6,8 ± 0,38	3,5	3,5
0,125	18,6 ± 0,45	20,3	20,3
0,250	32,6 ± 1,05	35,1	35,1
0,375	46,5 ± 1,01	48,4	48,4
0,50	58,1 ± 0,65	59,9	60,3
0,75	80,3 ± 1,25	79,1	80,3
1,00	95,8 ± 2,03	93,8	96,2
1,50	116,2 ± 2,96	112,3	119,0
2,0	118,2 ± 3,91	120,3	135,5
3,0	116,1 ± 3,02	117,7	148,5
4,0	108,4 ± 4,3	102,5	154,5
6,0	71,2 ± 4,92	63,1	157,8
8,0	18,2 ± 6,77	31,1	158,4
10,0	5,6 ± 5,63	12,5	158,5

В книге [16] приведено детальное изложение теории В. Вауле^{*} (Б. Бауле) относительного «второго приближения закона действия факторов роста». По мнению профессора А.Т. Кирсанова, первое приближение закона Э.А. Митчерлиха охватывало наиболее распространенные почвенные разности, характерные для Восточной Пруссии; совершенно другая ситуация возникает, если при опытах в сосудах вносят дозы удобрений, в 10 раз превосходящие значения, используемые на практике; часто такие варианты возникают и на практике, когда применяют удобрения в больших дозах. Рассмотрим основное уравнение «закона действия факторов роста» в виде:

$$\lg(A - y) = \lg(A) - cx, \quad (22)$$

или:

^{*}) Baule B. Zu Mitscherlichs Gesetz der physiologischen Beziehungen // Landw. Jahrb, 1918. Vol. 51.

$$y(x) = A[1 - 10^{-cx}] \quad (23)$$

(соотношение (15), стр. 72, [16]).

Соотношения (22) и (23) являются точными частными решениями опубликованного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = c_1(A - y). \quad (24)$$

Для относительного повышения урожая можно записать уравнение:

$$\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = c_1 \left(\frac{A - y}{y}\right) \quad (25)$$

(уравнение (16), стр. 72, [16]),

и специально (В. Вауле) отмечается: подставляя в это уравнение соответствующие величины $A - y$ и y согласно соотношениям (22) и (23), получим уравнение:

$$\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = c_1 \left(\frac{10^{-cx}}{1 - 10^{-cx}}\right) \quad (26)$$

(уравнение (17), стр. 72, [16]),

и специально отмечается следующее допущение: пусть депрессия возрастает пропорционально количеству данного фактора x и равна $2kx$, в этом случае можно записать уравнение:

$$\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = c_1 \left(\frac{10^{-cx}}{1 - 10^{-cx}}\right) - 2kx \quad (27)$$

(уравнение (18), стр. 73, [16]).

Интегрируя уравнение (27) можно найти соотношение:

$$\lg(y) = \lg(1 - 10^{-cx}) - kx^2 + c, \quad (28)$$

или:

$$y(x) = (1 - 10^{-cx}) \cdot 10^{-kx^2} \cdot 10^c \quad (29)$$

(уравнение (20), стр. 73, [16]).

Приняв значение постоянной A равным:

$$10^c = A, \quad (30)$$

можно записать конечное выражение для *второго приближения* закона действия факторов роста:

$$y(x) = A(1 - 10^{-cx}) \cdot 10^{-kx^2} \quad (31)$$

(соотношение (21), стр. 73, [16]),

и специально отмечается следующее: в соотношении (31) имеется два постоянных коэффициента c и k ; коэффициент c академик Э.А. Митчерлих считает постоянной величиной для всех растений и условий среды, а константа k принимается постоянной только в пределах данного опыта; она изменяет свою величину в зависимости от типа растения, удобрения, вида почв, климата и т. д.; на величину k сильное влияние оказывает буферность почв: на песчаных почвах значение константы k значительно больше, чем на глинистых или почвах богатых органическими веществами и т. д.

Можно отметить следующее: уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = c_1(A - y), \quad (32)$$

$$\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = c_1 \left(\frac{A - y}{y}\right) - 2kx \quad (33)$$

– это два совершенно разных уравнения. Соотношение:

$$y(x) = A[1 - 10^{-c_1x}] \quad (34)$$

является точным частным решением уравнения (32) при нулевых начальных условиях. Соотношение:

$$y(x) = A(1 - 10^{-c_1x}) \cdot 10^{-kx^2} \quad (35)$$

не является частным решением уравнения (33). Это выражение вообще не явля-

ется решением уравнения (33), поэтому *результаты Б. Бауле–Э.А. Митчерлиха относительно «второго приближения закона действия факторов роста» нуждаются в уточнении и дальнейшем развитии.* Подставляя (35) и производную первого порядка от соотношения (35) в уравнение (33), получим следующее выражение:

$$c_1 \cdot 10^{-kx^2} \ln 10 = (1 - 10^{-cx}) [2kx(\ln 10 + 1) + c \ln 10], \quad (36)$$

которое не является тождеством и, следовательно, *все результаты относительно второго приближения закона действия факторов роста являются ошибочными.*

Новая приближенная цифровая модель депрессии роста и развития растений. Принимаем справедливость утверждения: урожайность (y) и ее прибавка возрастают при увеличении количества факторов роста (x) пропорционально количеству урожая ($A - y$), не достигшего предельной потенциальной урожайности (A) и возможному значению урожая ($B + y$) выше некоторого минимального (начального) значения (B) урожая, и поэтому можно записать уравнение:

$$\left(\frac{1}{B + y}\right) \frac{dy}{dx} = c(A - y)(1 + 2kx), \quad (37)$$

где c – коэффициент пропорциональности, называемый «коэффициентом действия фактора роста»; k – коэффициент депрессии роста и развития растения; A – постоянный параметр, определяемый по экспериментальным (опытным) данным и равный «*потенциальной урожайности*» растения; B – постоянный параметр, определяемый по экспериментальным данным и равный «*начальному*» значению урожая определенной культуры для конкретной почвы, гидрометеоусловий района и ландшафта.

Для решения дифференциального уравнения (37) назначим «*начальные*» условия:

$$y(x_0) = y_0, \quad (38)$$

где x_0, y_0 – постоянные параметры, определяющие соответственно «начальное» значение фактора роста (x_0) и «начальное» значение урожая (y_0), можно принять $y_0 = B$.

Решение основного дифференциального уравнения (37), удовлетворяющее начальным условиям (38), можно записать в виде:

$$\ln[(A - y_0)(B + y)] = \ln[(B + y_0)(A - y)] + c(A + B)[(x - x_0) + k(x^2 - x_0^2)], \quad (39)$$

или в виде:

$$\ln \left[\frac{(A - y_0)(B + y)}{(B + y_0)(A - y)} \right] = c(A + B)[(x - x_0) + k(x^2 - x_0^2)]. \quad (40)$$

Значение коэффициента действия фактора роста (c_i) можно находить на каждом интервале от $x = x_{i-1}$ до $x = x_i$ по формуле:

$$c_i = \frac{\ln[(A - y_{i-1})(B + y_i)] - \ln[(B + y_{i-1})(A - y_i)]}{(A + B)[(x_i - x_{i-1}) + k(x_i^2 - x_{i-1}^2)]}, \quad (41)$$

где i – индекс, целое положительное число ($i = 1, 2, 3, \dots$).

При таких условиях урожайность (y_i) можно находить по формуле:

$$y_i(x) = \frac{A(B + y_{i-1}) \exp[c_i(A + B)[(x_i - x_{i-1}) + k(x_i^2 - x_{i-1}^2)] - B(A - y_{i-1})}{(B + y_{i-1}) \exp[c_i(A + B)[(x_i - x_{i-1}) + k(x_i^2 - x_{i-1}^2)] + (A - y_{i-1})}. \quad (42)$$

Значение потенциальной урожайности (A) при этом определяется по формуле:

$$A + B = \frac{2(B + y_1)(B + y_2)(B + y_3) - (B + y_2)^2(y_1 + y_3 + 2B)}{(B + y_1)(B + y_3) - (B + y_2)^2}. \quad (43)$$

Соотношение (40) можно записать в виде:

$$\left(\frac{1}{A + B} \right) \ln \left[\frac{(A - y_0)(B + y)}{(B + y_0)(A - y_0)} \right] = \alpha + mx + nx^2, \quad (44)$$

где

$$\alpha = -cx_0(1 + kx_0); \quad m = c; \quad n = ck,$$

α, m, n – коэффициенты, определяемые методом наименьших квадратов.

«Оптимальное» значение фактора роста ($x_{кр}$) можно найти из уравнения:

$$m + 2nx_{кр} = 0, \quad (45)$$

или:

$$x_{кр} = -\frac{m}{2n}. \quad (46)$$

Чтобы уменьшить объем вычислительной работы и повысить точность расчетов, вместо основного уравнения (37), начальных условий (38) и решения в виде соотношения (40) можно используя безразмерные единицы $u(v)$:

$$u = \frac{y}{A}, \quad v = \frac{x}{A}, \quad (47)$$

использовать соответственно соотношения:

$$\frac{du}{dv} = cAB(1 + \beta u)(1 - u), \quad (48)$$

$$u(v_0) = u_0, \quad A = \beta B, \quad (49)$$

$$\ln \left[\frac{(1 + \beta u)(1 - u_0)}{(1 + \beta u_0)(1 - u)} \right] = cAB(1 + \beta)[(v - v_0) + k(v^2 - v_0^2)]. \quad (50)$$

Формулы (45) и (46) остаются справедливыми.

Примеры расчетов. Пример 5. Рассмотрим влияние объема воды на урожай ячменя в опытах Гелльригеля, подробно описанные в монографии Э.Дж. Рэсселя [18]. Опытами установлено, что большой объем воды (60–80 % от объема полного насыщения песчаной почвы) приводит к уменьшению количества сухого вещества в зерне ячменя (табл. 12).

Таблица 12

Зависимость урожая ячменя от объема снабжения водой (Рэссель Э.Дж., [18], стр. 49)

№ п/п	Опыт X_i (%)	Опыт \bar{X}_i (б. е.)	Опыт y_i (г/сосуд)	Опыт \bar{y}_i (б. е.)	Расчет \bar{y}_i (б. е.)
1	2	3	4	5	6
1	10	0,1	0,72	–	–
2	20	0,2	7,75	0,254415	0,217648
3	30	0,3	9,73	0,359067	0,349539
4	40	0,4	10,51	0,463706	0,432176
5	60	0,6	9,96	0,380263	0,449687
6	80	0,8	8,77	0,298281	0,270180

Ячмень выращивался в специальных сосудах с песчаной почвой, все необходимые питательные вещества в опытах обеспечивались полностью, за исключением соли ($\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$), количество которой строго контролировалось по азоту (мг), а значение урожая измерялось с точностью до $1 \cdot 10^{-3}$ г [18].

Из данных таблицы 12 используем значения: $y_0 = 0,72$; $y_1 = 7,75$; $y_2 = 9,73$; $y_3 = 10,51$; $B = 0,72$; по формуле (43) найдем максимально возможное (потенциальную урожайность) количество сухого вещества (A) в зерне ячменя:

$$A + 0,72 = \frac{2(0,72 + 7,75)(0,72 + 9,73)(0,72 + 10,51) - (10,45)^2(19,7)}{(0,72 + 7,75)(0,72 + 10,51) - (0,72 + 9,73)^2}$$

или:

$$A + 0,72 = 11,959; \quad A = 10,876; \quad A + B = 11,959.$$

Методом наименьших квадратов получим для опытных данных в безразмерных единицах (б. е.) следующую зависимость:

$$\bar{y}(\bar{x}) = -0,193898 + 2,550275\bar{x} - 2,462721\bar{x}^2.$$

По формуле (46) находим максимально возможный объем воды для полива ячменя:

$$\bar{x}_{\text{кр}} = \frac{2,550275}{2 \cdot 2,462721} = 0,518,$$

или:

$$x_{\text{кр}} = 51,8 \%,$$

что подтверждается экспериментальными данными ($x_{\text{кр}} \approx 52 \%$) (табл. 12).

Профессор Э.Дж. Рэссель [18] поясняет это тем, что «излишек воды сокращает приток воздуха к корням».

Пример 6. Рассмотрим опытные данные о количестве сухого вещества в соломе ячменя в зависимости от объема воды при поливе, подробно описанные в монографии Э.Дж. Рэссель [18], таблица 13.

Из данных таблицы 13 используем значения: $y_0 = 1,8$; $y_1 = 5,5$; $y_2 = 9,64$; $y_3 = 11,00$; $B = 1,8$, по формуле (43)

найдем максимально возможную массу сухого вещества (A) в соломе ячменя:

$$A + 1,8 = \frac{2(1,8 + 5,5)(1,8 + 9,64)(1,8 + 11,00) - (11,44)^2(20,1)}{(7,3)(12,8) - (11,44)^2} = 13,161,$$

или:

Таблица 13

Зависимость количества сухого вещества в соломе ячменя (z) от объема воды при поливе (Рэссель Э.Дж., [18], стр. 49)

Показатель	№ п/п					
	1	2	3	4	5	6
Количество воды*, б. е.	0,10	0,20	0,30	0,40	0,60	0,80
Масса сухого вещества, г	1,80	5,50	8,20	9,64	11,00	9,47

* 1,00 (или 100 %) означает количество воды, требуемой для полного насыщения песчаной почвы в сосудах

$$A = 11,361; \quad B = 1,8; \quad A + B = 13,161.$$

Методом наименьших квадратов получим для опытных данных в безразмерных единицах (б. е.) следующую зависимость:

$$\bar{y}(\bar{x}) = -0,157581 + 1,524067\bar{x} - 1,297166\bar{x}^2.$$

По формуле (46) находим максимально возможный объем воды для полива ячменя:

$$\bar{x}_{\text{кр}} = \frac{1,524067}{2 \cdot 1,297166} = 0,587,$$

или:

$$x_{\text{кр}} = 58,7 \%,$$

что подтверждается экспериментальными данными, таблица 13 ($x_{\text{кр}} \approx 60 \%$).

Пример 7. Рассмотрим результаты лабораторных опытов Э.А. Митчерлиха, полученные при изучении влияния азотистых удобрений на урожай овса (табл. 12); по опытным данным установлено значение потенциальной урожайности овса ($A = 158,5$ г/сосуд); методом наименьших квадратов [19] для опытных данных таблицы 12 получено уравнение:

$$u(x) = -0,00055x^2 + 0,00442x + 0,004217.$$

Оптимальное количество азота на сосуд (по формуле (46) равно:

$$x_{кр} = \frac{0,00442}{2 \cdot 0,00055} = 4,02 \text{ г/сосуд,}$$

что подтверждается экспериментальными данными.

Значение $x_{кр} = 4,02$ г/сосуд является критическим, оно определяет количество азота, превышение которого (в виде азотных удобрений) будет способствовать уменьшению урожайности овса.

Список литературы

1. Цифровая экономика Российской Федерации. Программа утверждена Распоряжением Правительства Российской Федерации от 28 июня 2017. № 1632-р.

2. *Огнивцев С.Б.* Концепция цифровой платформы агропромышленного комплекса // Международный сельскохозяйственный журнал. – 2018. – Т. 61. – № 2. – С. 16–22.

3. *Огнивцев С.Б.* Актуальные вопросы современной агропродовольственной политики // Международный сельскохозяйственный журнал. – 2018. – Т. 61. – № 4 (364). – С. 67–70.

4. *Огнивцев С.Б.* Цифровизация экономики и экономика цифровизации АПК // Международный сельскохозяйственный журнал. – 2019. – Т. 62. – № 2 (368). – С. 77–80.

5. *Ерешко Ф.И., Кульба В.В., Меденников В.И.* Интеграция цифровой платформы АПК с цифровыми платформами смежных отраслей // АПК: экономика, управление. – 2018. – № 10. – С. 34–46.

6. *Меденников В.И.* Цифровая экосистема АПК: Научный подход // Международный сельскохозяйственный журнал. – 2022. – Т. 65. – № 2 (386). – С. 116–119.

7. *Эльдиева Т.М.* Цифровые технологии – надежный спутник современного сельского хозяйства региона // Международный сельскохозяйственный журнал. – 2019. – Т. 62. – № 5 (371). – С. 55–57.

8. *Сологуб Н.Н., Уланова О.И., Остробородова Н.И., Остробородова Д.А.* Проблемы и перспективы цифровых технологий в сельском хозяйстве // Между-

народный сельскохозяйственный журнал. – 2021. – Т. 64. – № 4 (382). – С. 28–30.

9. *Григулецкий В.Г.* Обобщение закона действия факторов роста и продуктивности растений Э.А. Митчерлиха // Масличные культуры. – 2022. – Вып. 2 (190). – С. 18–29.

10. *Григулецкий В.Г.* Приближенные цифровые модели роста и продуктивности растений (обзор) // Масличные культуры. – 2022. – Вып. 3 (191). – С. 79–108.

11. *Mitscherlich E.A., Merrec E.* Eine quantitative Stickstoffanalyse für sehr geringe Mengen // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft. – 1909. – Bd. XXXVIII. – Vol. 7. – St. 537–552.

12. *Митчерлих Э.А.* Потребность почвы в удобрении. Практическое применение в земледелии закона действия факторов роста. – М.-Л.: Госиздат, 1928. – 70 с.

13. *Митчерлих Э.А.* Определение потребности почвы в удобрении. – Госиздат сельскохозяйственной и колхозно-кооперативной литературы, 1931. – 104 с.

14. *Митчерлих Э.А.* Почвоведение. – М.: ИЛ, 1957. – 416 с.

15. *Перегудов В.Н.* Совместное действие нескольких факторов, теория Митчерлиха и правило Риппеля // Труды Научного Института по Удобрениям имени Я.В. Самойлова. – 1933. – Вып. 93. – С. 258–305.

16. *Курсанов А.Т.* Теория Митчерлиха, ее анализ и практическое применение. 2-е перераб. и доп. издание. – М.-Л.: Сельхозгиз, 1930. – 200 с.

17. *Очкас Н.А., Брагина О.А., Гончарова Ю.К.* Разработка агротехники сортов риса при возделывании в условиях Краснодарского края // Труды Кубанского государственного университета имени И.Т. Трубилина. – 2020. – № 4 (85). – С. 172–177.

18. *Рэссель Э.Дж.* Почвенные условия и рост растений. – М.: Сельхозгиз, 1931. – 440 с.

19. *Григулецкий В.Г., Яценко З.В.* Высшая математика для экономистов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 640 с.

References

1. Tsifrovaya ekonomika Rossiyskoy Federatsii. Programma utverzhdena Rasporyazheniyem.

zheniem Pravitel'stva Rossiyskoy Federatsii ot 28 iyunya 2017. № 1632-r.

2. Ognivtsev S.B. Kontsepsiya tsifrovoy platformy agropromyshlennogo kompleksa // Mezhdunarodnyy sel'skokhozyaystvennyy zhurnal. – 2018. – T. 61. – № 2. – S. 16–22.

3. Ognivtsev S.B. Aktual'nye voprosy sovremennoy agroproduktivnoy politiki // Mezhdunarodnyy sel'skokhozyaystvennyy zhurnal. – 2018. – T. 61. – № 4 (364). – S. 67–70.

4. Ognivtsev S.B. Tsifrovizatsiya ekonomiki i ekonomika tsifrovizatsii APK // Mezhdunarodnyy sel'skokhozyaystvennyy zhurnal. – 2019. – T. 62. – № 2 (368). – S. 77–80.

5. Ereshko F.I., Kul'ba V.V., Medennikov V.I. Integratsiya tsifrovoy platformy APK s tsifrovymi platformami smezhnykh otrasley // APK: ekonomika, upravlenie. – 2018. – № 10. – S. 34–46.

6. Medennikov V.I. Tsifrovaya ekosistema APK: Nauchnyy podkhod // Mezhdunarodnyy sel'skokhozyaystvennyy zhurnal. – 2022. – T. 65. – № 2 (386). – S. 116–119.

7. El'dieva T.M. Tsifrovye tekhnologii – nadezhnyy sputnik sovremennoy sel'skogo khozyaystva regiona // Mezhdunarodnyy sel'skokhozyaystvennyy zhurnal. – 2019. – T. 62. – № 5 (371). – S. 55–57.

8. Sologub N.N., Ulanova O.I., Ostroborodova N.I., Ostroborodova D.A. Problemy i perspektivy tsifrovyykh tekhnologiy v sel'skom khozyaystve // Mezhdunarodnyy sel'skokhozyaystvennyy zhurnal. – 2021. – T. 64. – № 4 (382). – S. 28–30.

9. Griguletskiy V.G. Obobshchenie zakona deystviya faktorov rosta i produktivnosti rasteniy E.A. Mitcherlikha // Maslichnye kul'tury. – 2022. – Vyp. 2 (190). – S. 18–29.

10. Griguletskiy V.G. Priblizhennyye tsifrovyye modeli rosta i produktivnosti rasteniy (obzor) // Maslichnye kul'tury. – 2022. – Vyp. 3 (191). – S. 79–108.

11. Mitscherlich E.A., Merrec E. Eine quantitative Stickstoffanalyse für sehr geringe Mengen // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft. – 1909. – Bd. XXXVIII. – Vol. 7. – St. 537–552.

12. Mitcherlikh E.A. Potrebnost' pochvy v udobrenii. Prakticheskoe primenenie v zemledelii zakona deystviya faktorov rosta. – M.-L.: Gosizdat, 1928. – 70 s.

13. Mitcherlikh E.A. Opredelenie potrebnosti pochvy v udobrenii. – Gosizdat sel'skokhozyaystvennoy i kolkhozno-kooprativnoy literatury, 1931. – 104 s.

14. Mitcherlikh E.A. Pochvovedenie. – M.: IL, 1957. – 416 s.

15. Peregudov V.N. Sovmestnoe deystvie neskol'kikh faktorov, teoriya Mitcherlikha i pravilo Rippelya // Trudy Nauchnogo Instituta po Udobreniyam imeni Ya.V. Samoylova. – 1933. – Vyp. 93. – S. 258–305.

16. Kirsanov A.T. Teoriya Mitcherlikha, ee analiz i prakticheskoe primenenie. 2-e pererab. i dop. izdanie. – M.-L.: Sel'khozgiz, 1930. – 200 s.

17. Ochkas N.A., Bragina O.A., Goncharova Yu.K. Razrabotka agrotekhniki sortov risa pri vzdelyvanii v usloviyakh Krasnodarskogo kraya // Trudy Kubanskogo gosudarstvennogo universiteta imeni I.T. Trubilina. – 2020. – № 4 (85). – S. 172–177.

18. Ressel' E.Dzh. Pochvennye usloviya i rost rasteniy. – M.: Sel'khozgiz, 1931. – 440 s.

19. Griguletskiy V.G., Yashchenko Z.V. Vysshaya matematika dlya ekonomistov. – Rostov-na-Donu: Feniks, 2004. – 640 s.

Сведения об авторе

Г.В. Григулецкий, д-р тех. наук, профессор, зав. каф. высшей математики

Получено/Received

10.10.2023

Получено после рецензии/Manuscript peer-reviewed

19.10.2023

Получено после доработки/Manuscript revised

27.10.2023

Принято/Accepted

30.10.2023

Manuscript on-line

30.12.2023