

Научная статья

УДК 631.8.631.43:582.683.2

DOI: 10.25230/2412-608X-2022-2-190-18-29

Обобщение закона действия факторов роста и продуктивности растений Э.А. Митчерлиха

Владимир Георгиевич Григулецкий

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина»
350044, Россия, г. Краснодар, ул. Калинина, 13
gvg-tnc@mail.ru

Аннотация. Проведен краткий анализ основных положений «закона совокупного влияния факторов роста», предложенного крупным теоретиком и экспериментатором агрономической науки профессором Э.А. Митчерлихом (1909). Его методика использовалась и до сих пор используется в разных странах при математической обработке (оценке) результатов лабораторных и полевых опытов при действии разных типов и количеств удобрений на разные растения, определении содержания питательных средств в почве и потребности почвы в удобрении, изучении растворения и адсорбции удобрений в почве, определении удельной поверхности и структуры почвы при поливах и т.д. Методика Э.А. Митчерлиха позволяла определить максимально возможный урожай разных сельскохозяйственных культур и найти возможные запасы питательных веществ в разных почвах; для разных условий во многих случаях (более 30000 полевых опытов), расчеты по этой методике приводили к хорошему соответствию опытных и расчетных данных. В статье предложена новая методика оценки действия факторов роста и урожайности сельскохозяйственных культур на основе следующего положения: *урожайность и прирост урожая возрастают при увеличении количества фактора роста и пропорциональны количеству урожая, не достигшего до (максимального) предельного значения и возможному значению урожая, выше некоторого минимального (начального) значения.* Для практических расчетов в статье получены приближенные формулы, позволяющие находить значение коэффициента действия факторов роста на урожайность, количество питательных веществ в почве и функциональную зависимость урожая сельскохозяйственных культур при действии конкретных

факторов роста. Предложенная математическая модель действия факторов роста на урожайность (продуктивность) сельскохозяйственных культур является более общей, чем известный закон действия факторов роста на урожайность, предложенный Э.А. Митчерлихом. В статье рассмотрены примеры расчетов, показывающие хорошее соответствие опытных и расчетных данных.

Ключевые слова: опыты, урожайность, удобрения, почва, запасы питательных веществ, коэффициент действия, максимальный урожай, минимальный урожай, дифференциальное уравнение, начальные условия, частное решение, кривая роста, дозы удобрений

Для цитирования: Григулецкий В.Г. Обобщение закона действия факторов роста и продуктивности растений Э.А. Митчерлиха // Масличные культуры. 2022. Вып. 2 (190). С. 18–29.

Благодарности. Автор признателен рецензентам за обсуждение работы.

UDC 631.8.631.43:582.683.2

Compilation of a law of the cumulative action of the growth factors and plant productivity by E.A. Mitscherlich.

V.G. Griguletsky, doctor of engineering, professor

Kuban State Agrarian University
13 Kalinina str., Krasnodar, 350044, Russia
gvg-tnc@mail.ru

Annotation. The article presents a brief analysis of the main provisions of the “law on the cumulative influence of growth factors”, proposed by a major theorist and experimenter of the agronomic science, Professor E.A. Mitscherlich (1909). The method of E.A. Mitscherlich has been used so far and is still widely used in the different countries for mathematical processing (evaluation) of the results of laboratory, plotting and field experiments on the effect of various types and amounts of fertilizers on different plants, determining the content of nutrients in the soil and the need for fertilizer in the soil, and studying the dissolution, and adsorption of fertilizers in the soil, determination of the specific surface area, and soil structure during irrigation, etc. The method of E.A. Mitscherlich made it possible to determine the maximum possible yield of the different agricultural crops and to find possible reserves of nutrients in different soils, for different conditions, in many cases (more than 30,000 field experiments). Calculations using the method of E.A. Mitscherlich led to a good match of experimental and calculated data. The article proposes a new method for assessing the effect of crop yield and yield factors based on the following statement:

yield and yield growth increase with an increase in the amount of growth factor and are proportional to the amount of the crop that has not reached the (maximum) limit value and the possible value of the crop, above a certain minimum (initial) value. For practical purposes, in the article, approximate formulas are obtained that allow us finding the value of the coefficient of action of growth factors on yield, the amount of nutrients in the soil, and the functional dependence of the crop yield under the action of specific growth factors. The proposed mathematical model of the effect of growth factors on the yield (productivity) of agricultural crops is more general than the well-known law of the effect of growth factors on productivity proposed by E.A. Mitscherlich. The article considers examples of calculations that show a good match between the experimental and calculated data.

Key words: experiments, yield, fertilizers, soil, nutrient reserves, coefficient of action, maximum yield, minimum yield, differential equation, initial conditions, partial solution, growth curve, fertilizer doses.

Acknowledgments. The author expresses his appreciation to the reviewers for the discussion.

Введение. Эйльхард Альфред Митчерлих (Eilhard Alfred Mitscherlich) известен как крупнейший теоретик и экспериментатор агрономической науки [1]. Более 110 лет назад, а именно в 1909 г., профессор Э.А. Митчерлих предложил и опубликовал [2] «закон совокупного действия факторов роста», который сыграл большую роль в развитии агрономической науки Германии, СССР и других стран [3; 4; 5; 6].

Большое практическое значение в СССР имели первые монографии Э.А. Митчерлиха на русском языке [7; 8]. По мнению профессора Ф.В. Турчина – редактора перевода монографии Э.А. Митчерлиха «Почвоведение» (М.: ИЛ, 1957), «несмотря на шаткость и ненадежность теоретического обоснования «закона действия факторов роста», все же имеется огромный, полученный экспериментальным путем материал, подтверждающий применимость формулы Митчерлиха для прогноза действия удобрений в условиях проведения этих опытов» ([1], с. 10). Основное положение «закона действия

факторов роста» Э.А. Митчерлих использовал при математической обработке результатов полевых и деляночных опытов при действии разных типов и количеств удобрений на разные растения (§§ 36–39, с. 197–221, [1]), при определении содержания питательных средств в почве и потребности почвы в удобрении (§ 40, с. 221–226, [1]), при изучении удельной поверхности почвы в зависимости от влажности (§ 10, с. 48–55, [1]), исследовании структуры (§ 11, с. 58–60, [1]) и устойчивости скважности (§ 13, с. 60–67, [1]) почвы и т.д.

Научный институт по удобрениям СССР (НИУ), сейчас – Всероссийский научно-исследовательский институт агрохимии имени Д.Н. Прянишникова, активно внедрял и использовал методику Э.А. Митчерлиха при проведении полевых опытов. Под руководством профессора А.Н. Лебеяднцава именно в НИУ СССР с 1926 по 1930 гг. проведены первые широкие географические опыты с минеральными удобрениями [3; 4; 6; 9–13] по методу Митчерлиха. По свидетельству профессора А.Т. Кирсанова [4], «отдел земледелия Государственного института опытной агрономии (НИУ), образованный в марте 1927 г., с первых же дней своего существования начал изучение теории Э.А. Митчерлиха, считая, что она является одной из наиболее крупных теорий и не ограничивается одной только областью определения потребности почв в удобрениях, а имеет гораздо более широкое теоретическое и практическое значение. Экспериментальная работа началась в мае 1927 г. в Детско-сельском отделении отдела земледелия и на руководимой мною же Растениеводственной станции Ленинградского сельскохозяйственного института. Работы начались сравнительно в небольших размерах, всего около 500 сосудов, и были целиком посвящены проверке теории по вопросам удобрения и влаги» ([4], с. 4–5).

С.С. Геркеным [11] подробно описаны результаты первых полевых опытов по Программе Географической сети Научного института по удобрениям за 1928 г., обработка которых выполнена по методике Э.А. Митчерлиха. Всего проведено 163 опыта на разных культурах: лен – 29 опытов, картофель – 20, овес – 29, сахарная свекла – 11, подсолнечник – 11, табак – 9 опытов и т.д., в разных регионах СССР, но больше всего опытов выполнено в нечерноземной полосе Российской Федерации.

По методике Э.А. Митчерлиха вычислены «максимально возможные» урожаи разных культур, определены возможные запасы питательных веществ в разных почвах и получены прогнозные значения урожайности опытных растений при использовании разных удобрений (по азоту, по фосфору и по калию) [11].

На специальном совещании в Научном институте по удобрениям 5–8 марта 1929 г. принято решение о продолжении полевых опытов по методике Э.А. Митчерлиха на землях СССР, и для этого была специально разработана «Методика проведения вегетационных опытов по Э.А. Митчерлиху» [13].

А.Я. Самойловой [12] подробно описаны первые вегетационные опыты по изучению плодородия среднеподзолистой и глинистой почв Долгопрудного опытного поля НИУ для разных растений; изучались овес, лен, конопля, томаты, картофель и сахарная свекла. Результаты опытов обрабатывались по методике Э.А. Митчерлиха с использованием следующих формул:

$$A = \frac{y_1^2 - y_0 y_2}{2y_1 - y_0 - y_2}; \quad (A)$$

$$c = \frac{\log(A - y_0) - \log(A - y_1)}{x_1 - x_0}; \quad (B)$$

$$b = \frac{\log(A) - \log(A - y_0)}{c}; \quad (C)$$

$$y(x) = A[1 - 10^{-cx}], \quad (D)$$

где A – максимально возможный урожай, полученный при оптимальном количестве изучаемого фактора;

c – коэффициент действия данного питательного фактора (x);

b – запас питательного вещества в почве;

$y(x)$ – количество урожая конкретного растения при внесении в почву определенного питательного вещества (x);

y_0, y_1, y_2 – количества урожая в опытах через равные интервалы внесения питательного вещества:

$$x_2 - x_1 = x_1 - x_0, \quad \text{причем} \quad y_0 = y(x_0), \\ y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2).$$

В 1933 г. опубликована большая критическая работа профессора В.Н. Перегудова [14] относительно обоснованности и корректности основных положений методики Э.А. Митчерлиха [1–8], в которой он отмечает следующее [14].

Во-первых, положения Э.А. Митчерлиха о выпуклости кривой роста и об убывании рентабельности последовательных доз удобрений вызывают возражения со стороны диалектиков-материалистов, отождествляющих кривую Митчерлиха с законом убывающего плодородия.

Во-вторых, использование фактического материала полевых опытов за 1928–1930 гг. показывает, что из 563 опытов вогнутость кривой роста наблюдалась в 392 опытах, или 70 %, а выпуклость кривой роста была только в 171 опыте, т.е. только 30 %.

В.Н. Перегудов [14] специально отмечает: «таким образом, априорно, с диалектической точки зрения, что процессы природы не идут изолированно один от другого, что существует определенное взаимодействие внутри комплекса причин того или иного явления, что пессимистический закон убывающего плодородия не соответствует действительности, мы должны считать, что теория Митчерлиха не является законом, что эта теория не

может верно отражать действительные процессы.

Из трех основных положений, выдвигаемых теорией Митчерлиха, только принцип совместного действия факторов может быть принят как соответствующий действительности. Два же остальных главнейших положения – независимость действий факторов и *выпуклость кривой роста* – страдают определенной механистичностью, крайне элементарным представлением о процессах природы и *придают теории Митчерлиха антидиалектический характер*.

Но нужно сказать, что, если с теоретической стороны нами определено отношение к теории Митчерлиха, то с фактической стороны дело обстоит иначе.

Приводится масса фактов, добытых опытным путем, которые будто бы подтверждают теорию Митчерлиха. Указывается на то, что сам Митчерлих вывел свой закон из большого материала, что в течение 20 лет Митчерлих находит все большее и большее число фактов, подтверждающих его концепцию, *что метод Митчерлиха дал блестящие результаты при применении его к определению потребности почв в удобрениях в Восточной Пруссии*. Кроме Митчерлиха, большое число исследователей приводят также массу фактов в пользу этой теории.

Таким образом, получается кажущееся противоречие между диалектическим миропониманием и фактами, и как будто бы факты встают на сторону теории Митчерлиха.

Конечно, противоречие это кажущееся. Оно получилось в результате того, что не всегда мы способны по отдельным звеньям процесса составить себе представление о процессе в целом (это будет возможным, когда будет установлена взаимная связь отдельных процессов между собой), что не всегда мы можем верно истолковать факты, а иногда даже желаем их осветить с определенной стороны и, наконец, это противоречие получилось

отчасти в результате тех особых условий, при которых добыты факты» [14].

Многие критические утверждения В.Н. Перегудова [14] относительно теории Э.А. Митчерлиха нуждаются в уточнении и ранее отмечались в работах В. Vaule [15; 16].

Основные положения «закона действия факторов роста» Э.А. Митчерлиха

Чтобы исключить разночтения, воспользуемся содержанием статьи Е.А. Mitscherlich, E. Merres [2] более детально.

Во-первых, Э.А. Митчерлих принимает, что *урожайность (y) и прирост урожая пропорциональны недостатку урожая до максимальной его величины (A)*, и, следовательно, можно записать дифференциальное уравнение первого порядка в обыкновенных производных:

$$\frac{dy}{dx} = (A - y)k \quad (1)$$

(уравнение (1), с. 540, [2]),

или:

$$\log(A - y) = c - kx \quad (2)$$

(соотношение (2), с. 540, [2]).

При известных двух значениях (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из соотношения (2) можно исключить значение постоянной c , и тогда можно записать:

$$\log(A - y_1) - \log(A - y_2) = k(x_2 - x_1) \quad (3)$$

(соотношение (3), с. 540, [2]).

Если опытные значения урожая y_1, y_2, y_3 определены через равные интервалы фактора роста, так что $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$, то из соотношения (3) можно найти:

$$\log(A - y_1) - \log(A - y_2) = \log(A - y_2) - \log(A - y_3) = 0,$$

и найти соотношение:

$$\frac{(A - y_3)(A - y_1)}{(A - y_2)^2} = 1.$$

Теперь можно найти значение A :

$$A = \frac{y_2^2 - y_1 y_3}{2y_2 - y_1 - y_3} \quad (4)$$

(формула (4), с. 540, [2]).

Если значение A установлено, то из уравнения (3) можно найти величину k :

$$k = \frac{\log(A - y_1) - \log(A - y_2)}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

(формула (5), с. 540, [2]).

Если значение k определено, то из соотношения (2) можно найти значение постоянной интегрирования c :

$$c = \log(A - y) + kx \quad (6)$$

(соотношение (6), стр. 541, [2]).

Соотношения (1)–(6) являются основными в методике Э.А. Митчерлиха, и они определяют главное содержание «закона совокупного действия факторов роста» ([1], с. 213).

В статье Mitscherlich, Merrec [2] приведены опытные значения применения фосфорного удобрения (x) и его влияния на урожайность (y) (табл. II, с. 541, [2]) (табл. 1).

Таблица 1

Урожайность зерновых в зависимости от количества фосфорных удобрений в опытах Э.А. Митчерлиха (табл. II, с. 541, [2])

№ № п/п	1	2	3	4	5
x	0,00	0,10	0,25	0,50	1,00
y (опыт)	3,1	8,1	15,8	26,6	44,1
y (расчет)	–	8,4	15,0	25,0	44,1

В последней строке приведены расчетные значения урожая (y) в зависимости от дозы фосфорных удобрений (x), полученные по формуле:

$$\log(94,6 - y) = 1,9613 - 0,258x \quad (7)$$

(соотношение (7), с. 541, [2]).

Из данных таблицы 1 видно, что максимальное отклонение расчетных значений ($y_p = 25,0$) урожайности от опытных данных ($y_{оп} = 26,6$) составляет 6,4 % при $x = 0,50$, что достаточно для практических расчетов.

Новая методика оценки действия факторов роста и продуктивности растений

Принимаем справедливость следующего утверждения: *урожайность (y) и ее прибавка возрастают при увеличении количества фактора роста (x) и пропорциональны количеству урожая ($A - y$), не достигающего до максимального предельного значения (A), и возможному значению урожая ($B + y$), выше некоторого минимального (начального) значения (B) урожая.*

Таким образом, можно записать следующее дифференциальное уравнение первого порядка в обыкновенных производных:

$$\frac{dy}{dx} = c(A - y)(B + y), \quad (8)$$

где c – коэффициент пропорциональности, называемый «коэффициентом действия фактора роста»;

A – постоянный параметр, определяемый по экспериментальным (опытным) данным и равный «максимальному возможному урожаю»;

B – постоянный параметр, определяемый по экспериментальным (опытным) данным и равный «начальному» значению урожая определенной культуры для конкретной почвы, гидрометеоусловий района и ландшафта.

Для дифференциального уравнения (8) назовем «начальные» условия:

$$y(x_0) = y_0 = B, \quad (9)$$

где x_0, y_0 – постоянные параметры, определяющие соответственно «начальное» значение фактора роста (x_0) и «начальное» значение урожая (y_0).

Решение дифференциального уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям (9), можно записать в виде:

$$\ln(A-y_0) - \ln(B+y_0) = \ln(A-y) - \ln(B+y) + c(A+B)(x-x_0), \quad (10)$$

или в виде:

$$\ln[(A-y_0)(B+y)] - \ln[(B+y_0)(A+y)] = c(A+B)(x-x_0), \quad (11)$$

или окончательно:

$$y(x) = \frac{A(B+y_0)\exp[c(A+B)(x-x_0)] - B(A-y_0)}{(B+y_0)\exp[c(A+B)(x-x_0)] + (A-y_0)}. \quad (12)$$

Соотношения (8)–(12) позволяют исследовать многие вопросы земледелия. В частности, из уравнения (11) можно найти для конкретных условий значение:

$$(x-x_0)(A+B) = \frac{\ln[(A-y_0)(B+y)] - \ln[(B+y_0)(A-y)]}{c}, \quad (13)$$

которое определяет количество питательных веществ в почве. Значение произведения $(x-x_0)(A+B)$ определяется по действию конкретного удобрения, мелиоранта и компоста на растения, т.е. по величине урожая, который получается при внесении в почву определенного количества конкретного питательного вещества.

Эффективность конкретного удобрения, мелиоранта и компоста, в частности, можно оценивать по значению «коэффициента действия фактора роста», который можно находить по формуле:

$$c = \frac{\ln[(A-y_0)(B+y)] - \ln[(B+y_0)(A-y)]}{(A+B)(x-x_0)}. \quad (14)$$

Значение коэффициента A можно найти по формуле:

$$A+B = \frac{2(y_1+B)(y_2+B)(y_3+B) - (y_2+B)^2(y_1+y_3+2B)}{(y_1+B)(y_3+B) - (y_2+B)^2}, \quad (15)$$

где y_1, y_2, y_3 – экспериментальные значения урожая, установленные через равные интервалы изменения фактора роста (x), т.е. $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ и соответственно $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, y(x_3) = y_3$, позволяют найти значение максимально возможного

урожая конкретного растения для определенных условий, состава почв и гидрометеорологических данных.

Предложенная математическая модель физиологического закона действия факторов роста на урожайность (продуктивность) сельскохозяйственных культур является обобщением известного закона Э.А. Митчерлиха [1; 2; 5; 7; 8].

Сравнивая (1) и (8) можно отметить, что уравнение (8) является более общим, чем уравнение Э.А. Митчерлиха (1). Принципиальное отличие решения Э.А. Митчерлиха (1) от предлагаемого решения (8) заключается в том, что «кривая Митчерлиха является строго выпуклой линией», а линия, определяемая соотношениями (10)–(12), содержит выпуклые и вогнутые участки, наличие которых справедливо доказано в критических статьях В. Вауле [15; 16] и В.Н. Перегудова [14]: «постоянная выпуклость кривой роста не наблюдалась в 30 % результатов (563 опыта) полевых опытов; в 171 опыте наблюдалась обратная зависимость – кривая роста имела вогнутый характер, а чаще всего – 40 % результатов, кривые роста имеют сначала выпуклый участок, а затем вогнутый участок, приближаясь к некоторому максимальному значению; некоторые кривые роста имеют участок с уменьшением значения урожайности» [14; 15; 16].

Применение новой методики оценки действия факторов роста и продуктивности растений

Пример 1. Рассмотрим опытные данные о влиянии фосфорных удобрений (x) на урожайность (y), представленные в таблице 2 (табл. II, с. 541, [2]).

Таблица 2

Зависимость урожайности зерновых (y) от количества фосфорных удобрений (x) в опытах Э.А. Митчерлиха (табл. II, с. 541, [2])

№ № п/п	1	2	3	4	5
Доза удобрений, x	0,00	0,10	0,25	0,50	1,00
Урожай, опыт, y	3,1	8,1	15,8	26,6	44,1
Урожай, формула (7)	–	8,4	15,0	25,0	44,1
Урожай, формула (16)	3,10	6,10	12,51	26,60	44,10

Воспользуемся новой методикой.

1. По формуле (15) находим значение коэффициента A , который определяет максимальный возможный урожай:

$$A+B = \frac{2(3,1+3,1)(3,1+26,6)(3,1+44,1) - (3,1+26,6)^2(3,1+44,1+6,2)}{(3,1+3,1)(3,1+44,1) - (3,1+26,6)^2} = 50,42$$

откуда следует:

$$A = 50,42 - 3,1 = 47,32.$$

По формуле (14) находим значение «коэффициента действия фактора роста» (c) на интервале от $x_0 = 0,5$ до $x = 1,0$:

$$c = \frac{\ln[(47,32 - 26,6)(3,1 + 44,1)] - \ln[(3,1 + 26,6)(47,32 - 44,1)]}{50,42(1,0 - 0,5)} = 0,092222$$

3. По формуле (12) устанавливаем зависимость урожая (y) от количества фосфорного удобрения (x) в виде:

$$y(x) = \frac{47,32(6,2)\exp(4,649833 \cdot x) - 137,082}{(6,2)\exp(4,649833 \cdot x) + 44,22} \quad (16)$$

при следующих значениях: $A = 47,32$; $B = 3,1$; $x_0 = 0$; $y_0 = 3,1$; $c = 0,092222$.

Результаты расчетов по формуле (16) представлены в последней строке таблицы 2.

Сравнивая результаты расчетов по формуле Э.А. Митчерлиха (7) и новой формуле (16) можно отметить следующее.

Во-первых, по новой формуле (16) определено значение урожая при $x = 0$, т.е. в опытах без применения удобрений, что очень важно для практики земледелия. Именно это обстоятельство отмечал А.Т. Кирсанов, утверждая, что «теория Митчерлиха нуждается в дальнейшем развитии. Она не применима при слабых урожаях» ([4], с. 182).

Во-вторых, по новой формуле (16) получены расчетные значения урожая (y), которые точно совпали с опытными данными при трех значениях: $x = 1,0$,

$y_{оп} = y_p = 44,10$; $x = 0,5$, $y_{оп} = y_p = 26,60$; $x = 0,0$, $y_{оп} = y_p = 3,10$ при общем количестве опытов $n = 5$; при этих же условиях, по формуле Э.А. Митчерлиха (7) расчетные значения урожая (y) совпали с опытными данными только в одном случае: $x = 1,0$, $y_{оп} = y_p = 44,10$.

В-третьих, в методике Э.А. Митчерлиха нахождение коэффициента A , который определяет максимальный возможный урожай, проводится по формуле (4) и для данных опытов получено значение $A = 94,6$; по новой методике нахождение коэффициента A проводится по формуле (15) и для данных опытов получено значение $A = 47,32$, которое в 2 раза меньше значения, полученного по методике Э.А. Митчерлиха ($A = 94,6$).

Можно отметить, что значение максимального возможного урожая $A = 94,6$ вызывает сомнение при полученных опытных данных. Это обстоятельство отмечалось в статье А.Я. Самойловой [12], когда величину A – максимальный возможный урожай, для всех культур (овес, лен, конопля, томаты, картофель, сахарная свекла) пришлось уменьшить, чтобы получить удовлетворительные расчетные значения урожая по методике Э.А. Митчерлиха. Например, вместо значения $A = 437,5$, принято значение $A = 377,78$ для овса; вместо значения $A = 286,3$, принято значение $A = 176,38$ для льна; вместо значения $A = 341,5$ принято значение $A = 303,0$ для сахарной свеклы [12].

Пример 2. Воспользуемся опытными данными, которые приведены в монографии Э.А. Митчерлиха [1] (табл. 76, с. 223, [1]), таблица 3.

Таблица 3

Средняя урожайность картофеля (y) в зависимости от количества калийных удобрений (x) в опытах Э.А. Митчерлиха (табл. 76, стр. 223, [1])

№ № п/п	1	2	3	4	5
Доза удобрений, x	0,00	0,10	0,25	0,50	1,00
Урожай, опыт, y	6,4	29,1	44,7	62,7	70,2
Урожай, формула (17)	10,8	28,0	45,7	61,9	73,0
Урожай, формула (18)	6,40	16,62	37,57	62,699	70,20

В монографии Э.А. Митчерлиха [1] для этих опытных данных получено уравнение:

$$\lg(76,0 - y) = \lg(76) - 0,133(x + 0,05). \quad (17)$$

Результаты расчетов по этой формуле даны в предпоследней строке таблицы 3.

Воспользуемся новой методикой.

1. По формуле (15) находим значение коэффициента A , который определяет максимальный возможный урожай:

$$A + B = \frac{2(6,4 + 6,4)(6,4 + 62,7)(6,4 + 70,2) - (6,4 + 62,7)^2(89,4)}{(12,8)(76,6) - (69,1)^2} = 76,79 \cdot$$

откуда следует:

$$A = 76,79 - 6,4 = 70,39.$$

2. По формуле (14) находим значение «коэффициента действия фактора роста» (c) на интервале от $x_0 = 0,5$ до $x = 1,0$:

$$c = \frac{\ln[(70,39 - 62,7)(6,4 + 70,2)] - \ln[(6,4 + 62,7)(70,39 - 70,2)]}{76,79(1 - 0,5)} = 0,099067 \cdot$$

3. По формуле (12) устанавливаем основную зависимость урожая (y) от количества калийного удобрения (x) в виде:

$$y(x) = \frac{70,39(12,8)\exp(7,607355 \cdot x) - 409,536}{(12,8)\exp(7,607355 \cdot x) + 63,99} \quad (18)$$

при следующих значениях: $A = 70,39$; $B = 6,4$; $x_0 = 0$; $y_0 = 6,4$; $c = 0,099067$.

Результаты расчетов по формуле (18) представлены в последней строке таблицы 3.

Сравнивая результаты расчетов по формуле Э.А. Митчерлиха (17) и новой формуле (18), можно отметить, что «кривая роста урожайности», полученная по новой методике расчета, точно проходит через три опытные точки (0,0; 6,4), (0,5; 6,7) и (1,0; 70,20), а «кривая роста урожайности» по методике Э.А. Митчерлиха не проходит через экспериментальные значения; максимальная абсолютная погрешность в начальной точке (0; 6,4) по методике Э.А. Митчерлиха более 68 %, определяя расчетное значение $y_p = 10,8$ вместо опытного значения $y_{оп} = 6,4$.

определяя расчетное значение $y_p = 10,8$ вместо опытного значения $y_{оп} = 6,4$.

Пример 3. Рассмотрим вопрос о прогнозировании урожая при внесении разных доз удобрений. Воспользуемся результатами деляночных опытов, подробно описанных в монографии А.Т. Кирсанова [4]. При изучении действия сернокислого аммония на горчице получены следующие результаты ([4], с. 118, табл. 5), таблица 4.

Таблица 4

Средняя урожайность горчицы (y) в зависимости от количества сернокислого аммония (x) в опытах А.Т. Кирсанова (табл. 5, стр. 118, [4])

№ № п/п	1	2	3	4
Доза удобрения, x	0,00	0,81	1,62	3,25
Урожай, опыт, $y_{оп}$	$y_0 = 42,6$	$y_1 = 89,4$	$y_2 = 136,8$	$y_4 = 178,8$
Урожай, формула (19)	42,60	89,39	136,79	198,69

Фактический урожай горчицы на поле без внесения удобрений ($x_0 = 0$) равен 42,6 ц/га ($y_0 = 42,6$), а при внесении сернокислого аммония в объеме 0,81 ц/га ($x_1 = 0,81$) и 1,62 ц/га ($x_2 = 1,62$) получен урожай $y_1 = 89,4$ ц/га и $y_2 = 136,8$ ц/га соответственно. Необходимо определить величину урожая горчицы (y) при внесении сернокислого аммония в объеме 3,25 ц/га ($x_4 = 3,25$).

По формуле (15) находим значение коэффициента A :

$$A + B = \frac{2(42,6 + 42,6)(42,6 + 89,4)(42,6 + 136,8) - (42,6 + 89,4)^2(264,6)}{(42,6 + 42,6)(42,6 + 136,8) - (42,6 + 89,4)^2} = 268,89 \cdot$$

откуда следует:

$$A = 268,89 - 42,6 = 226,29.$$

По формуле (14) находим значение «коэффициента действия фактора роста» (c) на интервале от $x_2 = 0,81$ до $x_3 = 1,62$:

$$c = \frac{\ln[(226,29 - 89,4)(42,6 + 136,8)] - \ln[(42,6 + 89,4)(226,29 - 136,8)]}{(268,89)(1,61 - 0,81)} = 0,003360$$

По формуле (12) устанавливаем основную зависимость урожая (y) от количества сернокислого аммония (x) в виде:

$$y(x) = \frac{226,29(85,2)\exp(0,903470 \cdot x) - 7825,194}{(85,2)\exp(0,903470 \cdot x) + 183,69} \quad (19)$$

при следующих значениях: $A = 226,29$; $B = 42,6$; $x_0 = 0$; $y_0 = 42,6$; $c = 0,003360$.

Результаты расчетов по формуле (19) представлены в последней строке таблицы 4.

Из данных таблицы 4 видно, что расчетное (прогнозное) значение урожая горчицы равно 198,69 ц/га при внесении сернокислого аммония в количестве 3,25 ц/га, а фактический урожай оказался равным 178,8 ц/га, т.е. отличается от расчетного на 11,1 %. Можно отметить также, что в данном случае методика Э.А. Митчерлиха не позволяет найти расчетное значение урожая горчицы при внесении сернокислого аммония в количестве 3,25 ц/га, потому что формула (4) не определяет реальное значение коэффициента A :

$$A = \frac{y_2^2 - y_1 y_3}{2y_2 - y_1 - y_3} = \frac{(89,4)^2 - (42,6)(136,8)}{2 \cdot 89,4 - 42,6 - 136,8} = \frac{2164,68}{-0,6}$$

(числитель – положительное число; знаменатель – отрицательное число).

На практике такие варианты возникают часто, отмечают А.Т. Кирсанов [4] и А.Я. Самойлова [12], поэтому «в таких случаях необходимо обратить особое внимание на тщательность выполнения опытов и брать не меньше, чем десятикратную повторность» ([4], с. 122).

Пример 4. Рассмотрим опытные данные о влиянии фосфорной кислоты (x) на урожайность овса (y), которые приведены в монографии А.Т. Кирсанова (табл. 10, с. 124, [4]), таблица 5.

Таблица 5

Средняя урожайность овса (y) в зависимости от количества фосфора (фосфорной кислоты) (x) в опытах А.Т. Кирсанова (табл. 10, стр. 124, [4])

№ № п/п	1	2	3	4
Доза удобрений, x , ц/га	0,00	0,81	1,62	3,25
Урожай, опыт, y , ц/га	134,2	230,1	264,2	284,0
Урожай, формула (20)	135,5	235,5	262,2	282,5
Урожай, формула (21)	134,20	230,10	264,20	275,6

А.Т. Кирсановым [4] для этих опытных данных по методике Э.А. Митчерлиха получено уравнение:

$$\lg(284 - y) = \lg(284) - 0,6(0,46 + x) \quad (20)$$

(уравнение без номера, с. 124, [1]).

Результаты расчетов урожайности по формуле (20) даны в предпоследней строке таблицы 5, и они отличаются от опытных данных не более чем на 2,5 %.

Воспользуемся новой методикой.

1. По формуле (15) находим значение коэффициента A :

$$A + B = \frac{2(134,2 + 134,2)(134,2 + 230,1)(134,2 + 264,2) - (134,2 + 230,1)^2(666,8)}{(268,4)(398,4) - (364,3)^2} = 410,50,$$

откуда следует:

$$A = 410,50 - 134,2 = 276,3.$$

2. По формуле (14) находим значение «коэффициента действия фактора роста» (c) на интервале от $x_0 = 0,81$ до $x = 1,62$:

$$c = \frac{\ln[(276,3 - 230,1)(134,2 + 264,2)] - \ln[(134,2 + 230,1)(276,3 - 264,2)]}{(410,5)(1,62 - 0,81)} = 0,004298.$$

3. По формуле (12) устанавливаем основную зависимость урожая (y) от количества фосфорной кислоты (x) в виде:

$$y(x) = \frac{276,3(268,4)\exp(1,76451 \cdot x) - 19069,82}{(268,4)\exp(1,76451 \cdot x) + 142,10} \quad (21)$$

при следующих значениях: $A = 276,3$; $B = 134,2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 134,2$; $c = 0,004298$.

Результаты расчетов по формуле (21) приведены в последней строке таблицы 5.

Из данных таблицы 5 видно, что расчетное (прогнозное) значение урожая овса равно 275,6 ц/га при внесении фосфорной кислоты в количестве 3,25 ц/га, а фактический урожай оказался равным 284,0 ц/га, т.е. отличается от расчетного на 3 %. Можно отметить также, что по новой методике, т.е. по формуле

(21), получены *расчетные значения урожайности овса, которые в трех точках: $x_1 = 0$; $x_2 = 0,81$, $x_3 = 1,62$ точно совпали с опытными данными.*

Пример 5. Рассмотрим результаты средней урожайности зерновых в зависимости от дозы азота за 55 лет (1852–1907 гг.) на пшеничных полях Бродбока, подробно описанные в фундаментальной монографии Э.Дж. Рэсселя (табл. V, с. 32, [17]), таблица 6.

Таблица 6

Средний урожай зерновых на пшеничных полях Бродбока за 55 лет (1852–1907 гг.) в зависимости от внесения азота [17], таблица 6

№ п/п	1	2	3	4
Внесено азота, х, мг	0	43	86	129
Урожай, опыт, у, г	2,315	3,948	5,833	7,005
Урожай, формула (22)	2,3150	3,9480	5,8329	7,8105

Воспользуемся результатами полевых опытов, представленных в таблице 6 для значений $x_1 = 0$; $x_2 = 43$; $x_3 = 86$ и урожайности $y_1 = 2,315$; $y_2 = 3,948$; $y_3 = 5,833$ соответственно, и определим возможную прогнозную величину урожайности зерновых (y) при внесении азота в количестве $x = 129$ мг.

Если использовать методику Э.А. Митчерлиха, то необходимо найти значение коэффициента A по формуле (4):

$$A = \frac{y_2^2 - y_1 y_3}{2y_2 - y_1 - y_3} = \frac{(3,948)^2 - (2,315)(5,833)}{2 \cdot 3,948 - 2,315 - 5,833} = \frac{6,368}{-0,713}$$

(числитель – положительное число; знаменатель – отрицательное число).

Таким образом, методика Э.А. Митчерлиха не позволяет в данном случае проводить анализ этих результатов полевых опытов.

Воспользуемся новой методикой.

По формуле (15) находим значение коэффициента A :

$$A + B = \frac{2(2,315 + 2,315)(2,315 + 3,948)(2,315 + 5,833) - (6,263)^2(12,778)}{(4,630)(8,148) - (6,263)^2} =$$

$$= 19,116$$

откуда следует:

$$A = 19,116 - 2,315 = 16,801.$$

По формуле (14) находим значение «коэффициента действия фактора роста» (c) на интервале от $x_0 = 0$ до $x = 86$:

$$c = \frac{\ln[(16,801 - 2,315)(2,315 + 5,833)] - \ln[(2,315 + 2,315)(16,801 - 5,833)]}{(19,116)(86 - 0)} = 0,000513.$$

3. По формуле (12) устанавливаем основную зависимость урожая (y) от количества азота (x) на интервале $x_0 = 0$ до $x = 86$:

$$y(x) = \frac{16,801(4,63)\exp(0,009807 \cdot x) - 33,535}{(4,63)\exp(0,009807 \cdot x) + 14,486} \quad (22)$$

при следующих значениях: $A = 16,801$; $B = 2,315$; $x_0 = 0$; $y_0 = 2,315$; $c = 0,000513$.

Результаты расчетов по формуле (22) приведены в последней строке таблицы 6.

Из данных таблицы 6 видно, что расчетные значения урожайности зерновых по формуле (22) *точно совпали с опытными данными* при $x_1 = 0$; $x_2 = 43$; $x_3 = 86$, т.е. $y_{1оп} = y_{1р} = 2,315$; $y_{2оп} = y_{2р} = 3,948$; $y_{3оп} = y_{3р} = 5,833$. Расчетное значение урожая зерновых (y) при внесении азота (x) в объеме $x_4 = 129$ мг при этом равно: $y_4(129) = 7,8105$ г, что отличается от фактического опытного значения $y_{оп}(129) = 7,005$ г на 11,5 %.

В заключение настоящей работы можно отметить следующее.

Математическая модель Э.А. Митчерлиха неоднократно критиковалась за то, что в ней не учитываются важные агротехнологические, технические и физиологические факторы, влияющие на рост и продуктивность сельскохозяйственных культур.

Учет всех пожеланий и критических замечаний известных (и неизвестных) исследователей по модели Э.А. Митчерлиха привел бы к *усложнению модели, потере наглядности и красоты анализа* агрономических результатов и, главное, к непреодолимым вычислительным трудностям.

В настоящей работе предложено развитие теории Э.А. Митчерлиха, которая основывается на общепринятых и известных положениях физиологической науки и, одновременно, учитывает некоторые важные факторы и эффекты «кривой роста» растений, указанные в опубликованных критических работах известных исследователей по этой проблеме.

Список литературы

1. Митчерлих Э.А. Почвоведение. – М.: ИЛ, 1957. – 416 с.

2. Mitscherlich E.A., Merrec E. Eine quantitative Stickstoffanalyse für sehr geringe Mengen // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft. – 1909. – Bd. XXXVIII. – Vol. 7. – S. 537–552.

3. Домонтович М.К. «Закон минимума» Либиха и «закон действия факторов роста» Митчерлиха. Опытное поле Петровской сельскохозяйственной академии // Бюллетень. – 1922. – № 31. – С. 1–25.

4. Курсанов А.Т. Теория Митчерлиха, ее анализ и практическое применение. – М.-Л.: Сельхозгиз, 1930. – 200 с.

5. Mitscherlich E.A. Die Pflanzenphysiologische bodenanalyse // Труды II Международного Конгресса почвоведов (Ленинград-Москва, 20–31 июля 1930 г.). IV Комиссия. Плодородие почв. – М.: Изд-во сельскохозяйственной и колхозно-кооперативной литературы, 1932. – С. 1–5.

6. Kirsanov A.T. Mathematische darstellung der Nährstoffwirkung // Труды II Международного Конгресса почвоведов (Ленинград-Москва, 20–31 июля 1930 г.). IV Комиссия. Плодородие почв. – М.: Изд-во сельскохозяйственной и колхозно-кооперативной литературы, 1932. – С. 6–13.

7. Митчерлих Э.А. Потребность почвы в удобрении. Практическое применение в земледелии закона действия факторов роста. – М.-Л.: Госиздат, 1928. – 70 с.

8. Митчерлих Э.А. Определение потребности почвы в удобрении. – Госиздат сельскохозяйственной и колхозно-кооперативной литературы, 1931. – 104 с.

9. Лебедев А.Н. Географические опыты НИУ с минеральными удобрениями // Труды Научного Института по Удобрениям имени Я.В. Самойлова, 1933. – Вып. 93. – С. 3–11.

10. Лебедев А.Н. Вегетационный метод // Избранные труды. – М.: Сельхозиздат, 1960. – С. 450–461.

11. Геркен С.С. Полевые опыты по Митчерлиху 1928 года // Удобрение и урожай. – 1929. – № 5. – С. 275–280.

12. Самойлова А.Я. Определение запаса азота в почве вегетационным методом Митчерлиха // Удобрение и урожай. – 1929. – № 6. – С. 355–358.

13. Смирнов Н.Д. Постановка вегетационных опытов по Митчерлиху // Удобрение и урожай. – 1931. – № 6. – С. 569–573.

14. Перегудов В.Н. Совместное действие нескольких факторов, теория Митчерлиха и правило Риппеля // Труды Научного Института по Удобрениям имени Я.В. Самойлова. – 1933. – Вып. 93. – С. 258–305.

15. Baule B. Zu Mitscherlichs Gesetz der physiologischen Beziehungen // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft. – 1918. – Bd. 51. – S. 363–385.

16. Baule B. Prinzipielle Überlegungen zum Wachstumsgesetz der Pflanze // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft, 1920. – Bd. LIV. – S. 493–505.

17. Рэссель Э.Дж. Почвенные условия и рост растений. – М.: Сельхозгиз, 1931. – 440 с.

References

1. Mitcherlich E.A. Pochvovedenie. – М.: ИЛ, 1957. – 416 с.

2. Mitscherlich E.A., Merrec E. Eine quantitative Stickstoffanalyse für sehr geringe Mengen // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft. – 1909. – Bd. XXXVIII. – Vol. 7. – S. 537–552.
3. Domontovich M.K. «Zakon minimuma» Libikha i «zakon deystviya faktorov rosta» Mitcherlikha. Opytnoe pole Petrovskoy sel'skokhozyaystvennoy akademii // Byulleten'. – 1922. – № 31. – S. 1–25.
4. Kirsanov A.T. Teoriya Mitcherlikha, ee analiz i prakticheskoe primeneniye. – M.-L.: Sel'khozgiz, 1930. – 200 s.
5. Mitscherlich E.A. Die Pflanzenphysiologische bodenanalyse // Trudy II Mezhdunarodnogo Kongressa pochvovedov (Leningrad-Moskva, 20–31 iyulya 1930 g.). IV Komissiya. Plodorodie pochv. – M.: Izd-vo sel'skokhozyaystvennoy i kolkhoznokooperativnoy literatury, 1932. – S. 1–5.
6. Kirsanov A.T. Mathematische darstellung der Nährstoffwirkung // Trudy II Mezhdunarodnogo Kongressa pochvovedov (Leningrad-Moskva, 20–31 iyulya 1930 g.). IV Komissiya. Plodorodie pochv. – M.: Izd-vo sel'skokhozyaystvennoy i kolkhoznokooperativnoy literatury, 1932. – S. 6–13.
7. Mitcherlikh E.A. Potrebnost' pochvy v udobrenii. Prakticheskoe primeneniye v zemledelii zakona deystviya faktorov rosta. – M.-L.: Gosizdat, 1928. – 70 s.
8. Mitcherlikh E.A. Opredeleniye potrebnosti pochvy v udobrenii. – Gosizdat sel'skokhozyaystvennoy i kolkhoznokooperativnoy literatury, 1931. – 104 s.
9. Lebedyantsev A.N. Geograficheskie opyty NIU s mineral'nymi udobreniyami // Trudy Nauchnogo Instituta po Udobreniyam imeni Ya.V. Samoylova, 1933. – Vyp. 93. – S. 3–11.
10. Lebedyantsev A.N. Vegetatsionnyy metod // Izbrannyye trudy. – M.: Sel'khozizdat, 1960. – S. 450–461.
11. Gerken S.S. Polevyye opyty po Mitcherlikhu 1928 goda // Udobreniye i urozhay. – 1929. – № 5. – S. 275–280.
12. Samoylova A.Ya. Opredeleniye zapasa azota v pochve vegetatsionnym metodom Mitcherlikha // Udobreniye i urozhay. – 1929. – № 6. – S. 355–358.
13. Smirnov N.D. Postanovka vegetatsionnykh opytov po Mitcherlikhu // Udobreniye i urozhay. – 1931. – № 6. – S. 569–573.
14. Peregudov V.N. Sovmestnoye deystvie neskolk'kikh faktorov, teoriya Mitcherlikha i pravilo Rippelya // Trudy Nauchnogo Instituta po Udobreniyam imeni Ya.V. Samoylova. – 1933. – Vyp. 93. – S. 258–305.
15. Baule B. Zu Mitscherlichs Gesetz der physiologischen Beziehungen // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft. – 1918. – Bd. 51. – S. 363–385.
16. Baule B. Prinzipielle Überlegungen zum Wachstumsgesetz der Pflanze // Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft, 1920. – Bd. LIV. – S. 493–505.
17. Ressel' E.Dzh. Pochvennyye usloviya i rost rasteniy. – M.: Sel'khozgiz, 1931. – 440 s.

Сведения об авторах

В.Г. Григулецкий, д-р тех. наук, профессор

Получено/Received

08.04.2022

Получено после рецензии/Manuscript peer-reviewed

11.04.2022

Получено после доработки/Manuscript revised

20.04.2022

Принято/Accepted

25.04.2022

Manuscript on-line

30.06.2022