

Научная статья

УДК 633.854.78:631.5

DOI: 10.25230/2412-608X-2021-4-188-8-17

## Новая математическая модель продуктивности подсолнечника в зависимости от площади питания растений

Владимир Георгиевич Григулецкий

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина»  
350044, Россия, г. Краснодар, ул. Калинина, 13  
vgv-tnc@mail.ru

**Ключевые слова:** подсолнечник, урожай, коэффициент действия фактора роста, площадь питания, продуктивность, густота стояния растений, дифференциальное уравнение, скорость роста, предельно возможный урожай, масса семян

**Для цитирования:** Григулецкий В.Г. Новая математическая модель продуктивности подсолнечника в зависимости от площади питания растений // Масличные культуры. 2021. Вып. 4 (188). С. 8–17.

**Аннотация.** В статье проведен краткий анализ результатов деляночных и полевых опытов по изучению продуктивности (урожайности) подсолнечника в зависимости от площади питания растений, выполненных во ВНИИМК. На основе анализа опытных зависимостей, определяющих изменение урожайности применяется справедливость следующего утверждения: *урожайность ( $y$ ) и его прибавка возрастают при увеличении количества фактора роста ( $x$ ) и пропорциональны количеству урожая ( $A - y$ ), не достигающего максимального предельного значения ( $A$ ), и возможно значению урожая ( $B + y$ ), выше некоторого минимального (начального) значения ( $B$ ) урожая. Для количественного определения величины урожая ( $y$ ), значения максимального предельного урожая ( $A$ ), количества питательных веществ в почве, коэффициента действия конкретных факторов роста и т. д. впервые установлены аналитические формулы, позволяющие исследовать многие вопросы земледелия для конкретных гидрометеоусловий и ландшафта. Приведены примеры расчетов по новой методике,*

показывающие хорошее соответствие опытных и тематических данных.

UDC 633.854.78:631.5

## New mathematical model of sunflower productivity depending on area plant nutrition.

V.G. Griguletsky, doctor of engineering, professor

Kuban State Agrarian University named after Trubilin I.T.  
13 Kalinina str., Krasnodar 350044, Russia  
vgv-tnc@mail.ru

**Key words:** sunflower, yield, rate of action of growth factors, nutrition area, productivity, plant population, differential equation, growth speed, limiting possible yield, seed weight

**Abstract.** The article provides a brief analysis of the results of plot and field experiments to study the productivity (yield) of sunflower, depending on the area of plant nutrition, performed at VNIIMK. Based on the analysis of the experimental dependencies that determine the change in yield, the following statement is applied: *yield ( $y$ ) and its increase rise with an increase in the amount of growth factor ( $x$ ) and are proportional to the amount of yield ( $A - y$ ) that does not reach the maximum the limiting value ( $A$ ), and the possible yield value ( $B + y$ ), is higher than a certain minimum (initial) value ( $B$ ) of the yield. The analytic formulas for the quantitative determination of yield value ( $y$ ), maximum limiting yield ( $A$ ), amount of nutrients in soil, a rate of action of growth factors, etc. are present for the first time. These formulas allow studying many problems of soil management in certain hydro-temperature conditions and landscape. The samples of accounts due to the new methodology which showed good correspondence between test and theme data are presented.*

**Введение.** Опытное изучение закономерностей формирования урожайности и качества семян подсолнечника позволило определить основные положения селекции, вывести новые сорта, решить многие вопросы технологии производства [1; 2].

Дальнейшее совершенствование техники и технологии выращивания подсолнечника требует решения многих практических вопросов повышения урожайности, улучшения качества семян (ядер), оптимизации масложирового производства, повышения технико-экономи-

ческих показателей и т. д. Известно, например, что эффективность масложирового производства в значительной мере зависит от *качества сырья*, которое во многом определяется *неравномерностью посевов по густоте стояния растений* [3]. В этом направлении важными являются результаты полевых и деляночных опытов, изложенные в работах [4; 5; 6; 7; 8]. В статье Дьякова А.Б. для исследования характера зависимости урожая семян от площади питания растений подсолнечника использовалась «классическая» модель Э.А. Митчерлиха [4]:

$$y = A (1 - 10^{-cx}) \quad (1)$$

(соотношение (1), с. 71, [4]),

где  $A$  – предельно возможный урожай;

$c$  – коэффициент действия фактора роста;

$x$  – количество фактора роста (площадь питания растения);

$y$  – количество урожая определенной культуры.

В этой статье [4] специально отмечается, что «по мнению Э.А. Митчерлиха, уравнение (1) имеет универсальный характер и пригодно, в частности, для описания зависимости урожая растений от величины площади питания. Если бы это утверждение было верно для урожая семян подсолнечника, то урожай с гектара был бы тем выше, чем больше число растений на гектаре. Однако *полевые опыты, проводившиеся многими исследователями, показывают, что наибольший урожай семян подсолнечника с гектара получается при густотах от 30000 до 60000 растений на га, а дальнейшее загущение посевов ведет к снижению урожая*» ([4], стр. 71).

Анализ результатов семи полевых опытов, проведенных в 1963–1968 гг. с разными сортами подсолнечника, показал, что, действительно, *уравнение (1) не согласуется с экспериментальными данными*. Но это же уравнение во всех случаях хорошо описывает зависимость урожая

семян (ядер семян) от площади питания растений, если в него ввести еще один параметр:

$$y = A [1 - 10^{-c(x-b)}] \quad (2)$$

(соотношение (2), стр. 72, [4]).

По мнению А.Б. Дьякова [4], параметр « $b$ » *определяет часть площади питания растения, которая не сказывается непосредственно на урожае семян*.

Например, по данным опытов 1966 г., значения постоянных  $A$ ,  $c$ ,  $b$  оказались равными  $A = 138$  г/растение;  $c = 1,3$ ;  $b = 0,05$  м<sup>2</sup>/растение, и *зависимость урожая ( $y$ ) семян подсолнечника от площади питания растений ( $x$ )* можно записать в виде:

$$y = 138 [1 - 10^{-1,3(x-0,05)}]. \quad (3)$$

В статье григулецкого В.Г. (2021) [9] приведено обоснование эмпирической формулы (2) на основе решения известного дифференциального уравнения П.Ф. Ферхюльста [10; 11], которое установлено в 1838 г. и широко используется в биофизике [10; 11] при изучении разных вопросов взаимодействия растительных сообществ [12; 13].

Отметим, теория профессора Э.А. Митчерлиха (Е.А. Mitscherlich; 1874–1956 гг.) и его «закон действия факторов роста» основан на утверждении, что *урожай и прирост урожая растений ( $y$ ) повышается с введением увеличивающихся количеств какого-либо фактора роста ( $x$ ) пропорционально урожаю, не достигающему до максимального урожая ( $A$ ), т. е.:*

$$\frac{dy}{dx} = c(A - y) \quad (4)$$

(уравнение (1), с. 21, [14]; уравнение (1), с. 9, [15] и уравнение (1), на с. 213, монография Э.А. Митчерлиха [16]).

Назначая для решения (4) «начальные» условия вида:

$$y(0) = 0, \quad (5)$$

Э.А. Митчерлих [14]–[16] получает частное решение уравнения (4) в виде:

$$\log(A - y) = \log(A) - c_1 x \quad (6)$$

(соотношение (3), с. 213, [16]; соотношение (2), с. 10, [15] и соотношение (3), с. 22, [14]).

Значение «коэффициента действия фактора роста» при этом определяется по следующей формуле:

$$c_1 = \frac{\log(A) - \log(A - y)}{x} \quad (7)$$

(формула без номера на с. 14, [15] и формула (5), с. 219, [16]).

Если вместо «нулевых» начальных условий (5) использовать более общие «начальные» условия вида:

$$y(x_0) = y_0, \quad (8)$$

то можно получить следующее выражение:

$$\log(A - y) = \log(A - y_0) - c_1(x - x_0), \quad (9)$$

и в натуральных логарифмах:

$$\ln(A - y) = \ln(A - y_0) - (c_1 \ln 10)(x - x_0). \quad (10)$$

Значение коэффициента действия фактора роста при этом можно найти по формуле:

$$c_1 = \frac{\ln(A - y_0) - \ln(A - y)}{(x - x_0) \ln 10}. \quad (11)$$

Зависимость урожая ( $y$ ) определенного растения от конкретного фактора роста ( $x$ ) (по Митчерлиху) при этом определяется следующей формулой:

$$y(x) = A - (A - y_0)e^{-c(x-x_0)} \quad (12)$$

или:

$$y(x) = \frac{A \exp[c(x - x_0)] - (A - y_0)}{\exp[c(x - x_0)]}. \quad (13)$$

Значение коэффициента ( $A$ ), выражающего максимально возможный урожай, при этом определяется по формуле:

$$A = \frac{y_2^2 - y_1 y_3}{2y_2 - (y_1 + y_3)} \quad (14)$$

(формула (VIII), стр. 64, [18]).

Относительно постоянных  $x_0, y_0$  профессор Э.А. Митчерлих специально отмечает следующее: «примем, что без внесения извне питательного вещества мы получим урожай ( $y_0$ ), которому следовательно отвечает определенный запас ( $b$ ) данного питательного вещества в почве» и его значение определяется по формуле:

$$x_0 = b = \frac{\log(A) - \log(A - y_0)}{c} \quad (15)$$

(формула (11), с. 34, [14]; формула (12), с. 13, [15]; формула (9), с. 218, [16]).

Соотношения (4)–(14) являются основными в теории профессора Э.А. Митчерлиха [14–16] (и его многих последователей), на основе которых получены важные теоретические и практические результаты в земледелии.

По мнению профессора Э.А. Митчерлиха [16], «закон действия факторов роста» в предложенном виде доказан на результатах тысячи вегетационных опытов и более чем на 30000 полевых опытов с удобрениями» ([16], с. 220).

Отметим, что «закон действия факторов роста» Э.А. Митчерлиха впервые опубликован в 1909 г. в третьем сообщении Кенигсбергского сельскохозяйственного Института [17]. Профессор М.К. Домонтович специально отмечает, что Э.А. Митчерлих «впервые опубликовал свою формулу, которая математически выражает зависимость между величиной урожая и величиной одного определенно-

го фактора роста растения, изменяющегося при определенной неизменной комбинации всех остальных факторов роста» ([17], с. 1). По мнению профессора М.К. Домонтовича, «определение относительных коэффициентов действия удобрений представляет объективный метод оценки удобрений посредством вегетационных культур» ([17], стр. 23). Профессор А.Т. Кирсанов в 1930 г. опубликовал большую и важную работу по анализу теории Э.А. Митчерлиха и практическому применению ее основных положений на опытных полях Ленинградского сельскохозяйственного института [18]. По мнению профессора А.Т. Кирсанова, *теория Э.А. Митчерлиха «является одной из наиболее крупных теорий и не ограничивается одной только областью определения потребности почв в удобрениях, а имеет гораздо более широкое теоретическое и практическое значение»* ([18], с. 4–5).

В качестве общего заключения профессор А.Т. Кирсанов отмечает следующие положения.

1. Теория Митчерлиха нуждается в дальнейшем ее развитии. Она не применима при слабых урожаях.

2. При урожаях не ниже средних теория Митчерлиха в подавляющем большинстве случаев дала весьма ценные для практики методы определения и в ее неизменной форме.

3. В данное время мы не имеем никакого другого более ценного для практики метода определения потребности почв в удобрениях, чем метод Митчерлиха.

4. Для дальнейшего развития и массового внедрения идей Митчерлиха и его практического метода нужна кооперативная работа наших опытных учреждений и сельскохозяйственных высших учебных заведений ([18], с. 182).

В 1933 г. опубликована большая критическая статья профессора В.Н. Перегудова по анализу основных положений и формул теории Э.А. Митчерлиха [19]. В основных выводах профессор В.Н. Перегудов [19] отмечает следующее. «Рас-

*смотрение теории Митчерлиха с диалектической стороны и сопоставление ее с имеющимся в нашем распоряжении материалом заставляют нас отметить крайнюю механистичность теории Митчерлиха в целом и отвергнуть ее как не соответствующую действительности. ...Теория Митчерлиха не соответствует полностью действительности, вследствие этого кривая Митчерлиха становится простой интерполяционной формулой, преимущества которой перед другими требуют своего исследования»* ([19], с. 302–303.)

Многие результаты критического анализа теории Э.А. Митчерлиха в работе профессора В.Н. Перегудова [19] нуждаются в уточнении.

#### **Новая математическая модель продуктивности подсолнечника**

На основе экспериментально установленных закономерностей изменения урожайности (продуктивности) разных растений принимаем справедливость следующего утверждения: *урожайность ( $y$ ) и ее прибавка возрастают при увеличении количества фактора роста ( $x$ ) и пропорциональны количеству урожая ( $A - y$ ), не достигающего потенциально (предельно) значения ( $A$ ), и возможному значению урожая ( $B + y$ ), выше некоторого минимального (начального) значения ( $B$ ) урожая.*

Таким образом, можно записать следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = c(A - y)(B + y), \quad (16)$$

где  $c$  – коэффициент пропорциональности, называемый «коэффициентом действия фактора роста»;

$A$  – постоянный параметр, определяемый по экспериментальным (опытным) данным и равный *потенциально (предельно) возможному урожаю*;

$B$  – постоянный параметр, определяемый по экспериментальным (опыт-

ным) данным и равный «начальному» значению урожая определенной культуры для конкретной почвы и гидрометеороусловий района.

Сравнивая основное дифференциальное уравнение теории Э.А. Митчерлиха (4) и предлагаемое уравнение (16), видим, что в «законе действия факторов роста Э.А. Митчерлиха» не учитывается пропорциональность количества урожая ( $y$ ) и его прибавка к возможному значению урожая ( $B + y$ ), выше некоторого минимального (начального) значения ( $B$ ) урожая. Известно, что почва может содержать некоторое количество питательных веществ ( $x_0$ ) и без внесения удобрений можно получить некоторое количество урожая ( $y_0$ ). Кривые зависимости, определяющие изменение урожая для всех растений показывают, что величина урожайности пропорциональна количеству питательных веществ в почве для конкретных гидрометеороусловий и определенного ландшафта без внесения дополнительных питательных веществ.

Для уравнения (16) назовем «начальные» условия:

$$y(x_0) = y_0 = B, \quad (17)$$

где  $x_0, y_0$  – постоянные параметры, определяющие соответственно «начальное» значение фактора роста ( $x_0$ ) и «начальное» значение урожая ( $y_0$ ).

Решение дифференциального уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям (17), можно записать в виде:

$$\ln(A - y_0) - \ln(B + y_0) = \ln(A - y) - \ln(B + y) + c(A + B)(x - x_0) \quad (18)$$

или в виде:

$$\ln\left(\frac{A - y_0}{B + y_0}\right) = \ln\left(\frac{A - y}{B + y}\right) + c(A + B)(x - x_0), \quad (19)$$

или окончательно:

$$y(x) = \frac{A(B + y_0)\exp[c(A + B)(x - x_0)] - B(A - y_0)}{(B + y_0)\exp[c(A + B)(x - x_0)] + (A - y_0)}. \quad (20)$$

Соотношения (16)–(20) позволяют исследовать многие вопросы земледелия. В частности, из уравнения (18) можно найти для конкретных условий значение:

$$(x - x_0)(A + B) = \frac{\ln[(A - y_0)(B + y)] - \ln[(B + y_0)(A - y)]}{c}, \quad (21)$$

которое определяет количество питательных веществ в почве. Значение произведения  $(x - x_0)(A + B)$  определяется по действию конкретного удобрения, мелиоранта и компоста на растения, т. е. по величине урожая, который получается при внесении в почву определенного количества конкретного питательного вещества.

Эффективность конкретного удобрения, мелиоранта и компоста можно оценивать по значению «коэффициента действия фактора роста», который можно найти по формуле:

$$c = \frac{\ln[(A - y_0)(B + y)] - \ln[(B + y_0)(A - y)]}{(A + B)(x - x_0)}. \quad (22)$$

Сравнивая формулы (7) (из теории Э.А. Митчерлиха) и (22) (предлагаемая математическая модель) видим, что последняя (22) учитывает больше факторов, влияющих на величину урожайности; в формуле (7) не учитываются значение «начального количества питательных веществ ( $x_0$ ) в почве» и величина начального урожая ( $y_0$ ).

Значение коэффициента  $A$ , который можно найти по приближенной формуле:

$$A + B = \frac{2(y_1 + B)(y_2 + B)(y_3 + B) - (y_2 + B)^2(y_1 + y_3 + 2B)}{(y_1 + B)(y_3 + B) - (y_2 + B)^2}, \quad (23)$$

где  $y_1, y_2, y_3$  – экспериментальные значения урожая, установленные через равные интервалы изменения фактора роста ( $x$ ), т. е.  $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$  и соответственно  $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, y(x_3) = y_3$ , позволяет найти значение потенциально (предельно) возможного урожая кон-

кретного растения для определенных условий, состава почв и гидрометеорологических данных.

Сравнение соотношений (13) и (20) показывает, что уравнение (20) является более общим, чем уравнение Э.А. Митчерлиха (13). Принципиальное отличие решения Э.А. Митчерлиха (13) от предлагаемого решения (20) заключается в том, что «кривая Митчерлиха является строго выпуклой линией», а линия, определяемая соотношениями (18)–(20) содержит выпуклые и вогнутые участки, наличие которых справедливо доказано в критической статье профессора В.Н. Перегудова [19]: «постоянная выпуклость кривой роста не наблюдалась в 30 % результатов (563 опыта) полевых опытов; в 171 опыте наблюдалась обратная зависимость – кривая роста имела вогнутый характер, а чаще всего – 40 % результатов, кривые роста имели выпуклый участок и вогнутый участок, приближаясь к некоторому максимальному значению; некоторые кривые роста имеют участок с уменьшением значения урожайности» [19].

#### Применения новой математической модели для анализа продуктивности подсолнечника

Рассмотрим вопрос о прогнозировании урожая подсолнечника на основе экспериментальных данных, представленных в статье А.Б. Дьякова, А.Г. Бехтер (табл. 1) [5].

Таблица 1

**Урожайность семян подсолнечника (сорт Передовик) в зависимости от густоты посевов в опытах 1973 г. [5]**

№ п. п.	1	2	3	4	5	6
Густота растения, тыс. шт./га	10	20	30	40	50	60
Урожайность (опыт), ц/га	17,72	26,14	27,33	27,96	27,94	27,96
Урожайность (расчет), ц/га	17,720	23,970	26,823	27,957	28,383	28,540

По данным таблицы 1, принимаем значения:  $x_0 = 10$ ;  $y_0 = 17,72$ ;  $B = 17,72$ ;  $y_1 = 26,14$ ;  $y_2 = 27,33$ ;  $y_3 = 27,96$ .

1. По формуле (23) находим значение параметра ( $A$ ), определяющего потенциально (предельно) возможный урожай:

$$A + B = \frac{2(26,14 + 17,72)(27,33 + 17,72)(27,96 + 17,72) - (27,33 + 17,72)^2(89,54)}{(26,14 + 17,72)(27,96 + 17,72) - (27,33 + 17,72)^2} = 46,35$$

или:

$$A = 46,35 - 17,72 = 28,63.$$

2. По формуле (22) находим значения коэффициентов действия фактора роста ( $c$ ) на разных интервалах изменения густоты растений:

– на интервале 10–20 тыс. шт./га:

$$c_1 = \frac{\ln[(28,63 - 17,72)(17,72 + 26,14)] - \ln[(17,72 + 17,72)(28,63 - 26,14)]}{(46,35)(20 - 10)} = 0,003646;$$

– на интервале 10–30 тыс. шт./га:

$$c_2 = \frac{\ln[(10,91)(17,72 + 27,33)] - \ln[(35,44)(28,63 - 27,33)]}{(46,35)(30 - 10)} = 0,002557;$$

– на интервале 10–40 тыс. шт./га:

$$c_3 = \frac{\ln[(10,91)(17,72 + 27,33)] - \ln[(35,44)(28,63 - 27,33)]}{(46,35)(40 - 10)} = 0,002186.$$

3. Найдем прогнозное (расчетное) значение урожая ( $y$ ) подсолнечника при густоте посева  $x = 50$  тыс. шт./га и  $x = 60$  тыс. шт./га при коэффициенте действия  $c = c_3 = 0,002186$  по формуле (20):

$$y(x) = \frac{28,63(35,4) \exp[0,002186(46,35)(x - 10)] - 193,33}{(35,4) \exp[0,002186(46,35)(x - 10)] + 10,91}$$

Расчеты по этой формуле приведены в последней строке таблицы 1 и отличаются от экспериментальных данных не более чем на 9,0 %.

Рассмотрим пример расчета масличности ( $M$ ) семян урожая подсолнечника (сорт Передовик) на основе экспериментальных данных, представленных в статье

А.Б. Дьякова, А.Г. Бехтер [5] по новой математической модели (табл. 2).

Таблица 2

**Сбор масла подсолнечника (сорт Передовик) в зависимости от густоты посевов в опытах 1973 г. [5]**

№ № п. п.	1	2	3	4	5	6
Густота растений, тыс. шт./га	10	20	30	40	50	60
Сбор масла (опыт), ц/га	7,36	11,97	13,27	13,70	13,43	13,55
Сбор масла (расчет), ц/га	7,360	11,596	13,210	13,700	13,837	13,876

По данным таблицы 2 принимаем значения:  $x_0 = 10$ ;  $y_0 = 7,36$ ;  $B = 7,36$ ;  $y_1 = 11,97$ ;  $y_2 = 13,27$ ;  $y_3 = 13,70$ .

1. По формуле (23) находим значение параметра ( $A$ ), определяющего потенциально (предельно) возможную масличность семян:

$$A + B = \frac{2(7,36 + 11,97)(7,36 + 13,27)(7,36 + 13,70) - (7,36 + 13,27)^2(40,39)}{(7,36 + 11,97)(7,36 + 13,70) - (7,36 + 13,27)^2} = 21,25$$

или:

$$A = 21,25 - 7,36 = 13,89.$$

2. По формуле (22) находим значения коэффициентов действия фактора роста ( $c$ ) на разных интервалах изменения густоты растений:

– на интервале 10–20 тыс. шт./га:

$$c_1 = \frac{\ln[(13,89 - 7,36)(7,36 + 11,97)] - \ln[(7,36 + 7,36)(13,89 - 11,97)]}{(21,25)(20 - 10)} = 0,007042;$$

– на интервале 10–30 тыс. шт./га:

$$c_2 = \frac{\ln[(6,53)(7,36 + 13,27)] - \ln[(14,72)(13,89 - 13,27)]}{(21,25)(30 - 10)} = 0,006334;$$

– на интервале 10–40 тыс. шт./га:

$$c_3 = \frac{\ln[(6,53)(7,36 + 13,70)] - \ln[(14,72)(13,89 - 13,70)]}{(21,25)(40 - 10)} = 0,006110.$$

3. Найдем прогнозное (расчетное) значение сбора масла ( $M$ ) при густоте посева

$x = 50$  тыс. шт./га и  $x = 60$  тыс. шт./га при коэффициенте действия  $c = c_3 = 0,006110$  по формуле (20):

$$M = \frac{13,89(14,72)\exp[0,006110(21,25)(x - 10)] - 48,06 \cdot (14,72)\exp[0,006110(21,25)(x - 10)] + 6,53}{(14,72)\exp[0,006110(21,25)(x - 10)] + 6,53}$$

Расчеты по этой формуле приведены в последней строке таблицы 2 и отличаются от экспериментальных данных не более чем на 3,0 %.

Рассмотрим пример расчета текущей высоты растений ( $H$ ) подсолнечника на основе новой математической модели по экспериментальным данным, представленным в все той же статье (табл. 3) [5].

Таблица 3

**Высота растений подсолнечника (сорт Передовик) в зависимости от густоты посевов в опытах 1973 г. [5]**

№ № п. п.	1	2	3	4	5	6
Густота растений, тыс.шт./га	10	20	30	40	50	60
Высота растений (опыт), м	1,708	1,782	1,912	2,018	2,038	2,022
Высота растений (расчет), м	1,7079	1,8286	1,9314	2,0179	2,0901	2,1499

По данным таблицы 3 принимаем значения:  $x_0 = 10$ ;  $y_0 = 1,708$ ;  $B = 1,708$ ;  $y_1 = 1,782$ ;  $y_2 = 1,912$ ;  $y_3 = 2,018$ .

1. По формуле (23) находим значение параметра ( $A$ ), определяющего потенциально (предельно) возможную высоту подсолнечника:

$$A + B = \frac{2(1,708 + 1,782)(1,708 + 1,912)(1,708 + 2,018) - (1,708 + 1,912)^2(7,216)}{(1,708 + 1,782)(1,708 + 2,018) - (1,708 + 1,912)^2} = 4,116;$$

или:

$$A = 4,116 - 1,708 = 2,408.$$

2. По формуле (22) находим значения коэффициентов действия фактора роста ( $c$ ) на разных интервалах изменения густоты растений:

– на интервале 10–20 тыс. шт./га:

$$c_1 = \frac{\ln[(2,408 - 1,708)(1,708 + 1,782)] - \ln[(1,708 + 1,708)(2,408 - 1,782)]}{(4,116)(20 - 10)} = 0,003235;$$

– на интервале 10–30 тыс. шт./га:

$$c_2 = \frac{\ln[(0,7)(1,708 + 1,912)] - \ln[(3,416)(2,408 - 1,912)]}{(4,116)(30 - 10)} = 0,004889;$$

– на интервале 10–40 тыс. шт./га:

$$c_3 = \frac{\ln[(0,7)(1,708 + 2,018)] - \ln[(3,416)(2,408 - 2,018)]}{(4,116)(40 - 10)} = 0,005440.$$

3. Найдем прогнозную (расчетную) высоту растений подсолнечника ( $H$ ) при  $c = c_3 = 0,005440$  по формуле (20):

$$H = \frac{2,408(3,416)\exp[0,005440(4,116)(x - 10)] - 1,196}{(3,416)\exp[0,005440(4,116)(x - 10)] + 0,70}$$

Расчеты по этой формуле приведены в последней строке таблицы 3 и отличаются от экспериментальных данных не более чем на 3,0 %.

Покажем эффективность применения новой математической модели при расчете среднего сбора масла сортов кондитерского подсолнечника в зависимости от густоты стояния растений на основе экспериментальных данных, представленных в статье Н.М. Тишкова, С.Г. Бородина (табл. 4) [6].

Таблица 4

*Средний сбор масла кондитерского подсолнечника (сорт Орешек) за три года (2006–2008 гг.) в зависимости от густоты посевов [6]*

№ № п. п.	1	2	3	4
Густота растений, тыс. шт./га	20	30	40	50
Сбор масла (опыт), т/га	1,15	1,27	1,38	1,39
Сбор масла (расчет), т/га	1,150	1,351	1,385	1,390

По данным таблицы 4 принимаем значения:  $x_0 = 20$ ;  $y_0 = 1,15$ ;  $B = 1,15$ ;  $y_1 = 1,27$ ;  $y_2 = 1,38$ ;  $y_3 = 1,39$ .

1. По формуле (23) находим значение параметра ( $A$ ), определяющего потенци-

ально (предельно) возможную масличность семян:

$$A + B = \frac{2(1,15 + 1,27)(1,15 + 1,38)(1,15 + 1,39) - (1,15 + 1,38)^2(4,96)}{(1,15 + 1,27)(1,15 + 1,39) - (1,15 + 1,38)^2} = 2,541;$$

или:

$$A = 2,541 - 1,15 = 1,391.$$

2. По формуле (22) находим значения коэффициентов действия фактора роста ( $c$ ) на разных интервалах изменения густоты растений:

– на интервале 20–30 тыс. шт./га:

$$c_1 = 0,029129;$$

– на интервале 20–40 тыс. шт./га:

$$c_2 = 0,062642;$$

– на интервале 20–50 тыс. шт./га:

$$c_3 = 0,073282.$$

3. Найдем расчетную масличность семян ( $M$ ) кондитерского подсолнечника в зависимости от густоты посевов ( $x$ ) при  $c = c_3 = 0,073282$  по формуле (20):

$$M = \frac{1,391(2,30)\exp[0,073282(2,541)(x - 20)] - 0,277}{(2,30)\exp[0,073282(2,541)(x - 20)] + 0,241}$$

Расчеты по этой формуле приведены в последней строке таблицы 4 и отличаются от экспериментальных данных не более чем на 6,3 %.

**Выводы.** 1. Предложена новая математическая модель роста и продуктивности подсолнечника в зависимости от площади питания растений, в которой принято, что урожайность подсолнечника и его прибавка возрастают при увеличении количества факторов роста и пропорциональны количеству урожая, не достигающего максимального (предельного) значения, и возможному значению урожая, выше некоторого минимального (начального) значения.



2. Для практических расчетов получены простые формулы, позволяющие находить текущий и прогнозируемый урожай для конкретных полевых и вегетационных опытов.

3. Рассмотрены примеры расчетов, показывающие эффективность новой методики анализа результатов полевых и вегетационных опытов (опытные данные А.Б. Дьякова, А.Г. Бехтер по урожайности ( $y$ ) подсолнечника Передовик отличаются от расчетных значений не более чем на 9 %, а экспериментальные данные по сбору масла ( $SM$ ) отличаются от расчетных значений не более чем на 3 %; расчетные значения высоты подсолнечника ( $H$ ) отличаются от экспериментальных данных не более чем на 3 %; опытные данные Н.М. Тишкова, С.Г. Бородин по среднему сбору масла ( $SM$ ) подсолнечника Орешек отличаются от расчетных значений не более чем на 6,3 %.

#### Список литературы

1. Подсолнечник: монография / Под общей ред. академика В.С. Пустовойта. – М.: Колос, 1975. – 591 с.
2. Пустовойт В.С., Дьяков А.Б. Урожайность подсолнечника на содержание белка в семенах // Вестник сельскохозяйственной науки. – 1972. – № 7. – С. 11–15.
3. Дьяков А.Б., Шарыгина М.Л., Васильева Т.А. Взаимодействие генотип – среда по признакам продуктивности и качества семян подсолнечника // НТИ ВНИИМК. – 2001. – Вып. 125. – С. 34–50.
4. Дьяков А.Б. Характер зависимости урожая семян от площади питания растений подсолнечника // Бюллетень НТИ по масличным культурам ВНИИМК. – 1969. – № 3. – С. 71–75.
5. Дьяков А.Б., Бехтер А.Г. Реакция растений подсолнечника на погодные условия в зависимости от густоты посева // Сборник научных трудов ВНИИМК имени В.С. Пустовойта «Вопросы физиологии масличных растений в связи с задачами селекции и агротехники». – 1975. – С. 47–52.
6. Тишков Н.М., Бородин С.Г. Продуктивность сортов кондитерского подсолнечника в зависимости от густоты стояния растений // Науч.-тех. бюл. ВНИИМК. – 2009. – Вып. 1 (140). – С. 57–64.
7. Лукомец В.М., Тишков Н.М. Урожайность и качественные показатели крупной фракции семян при выращивании сортов кондитерского подсолнечника с разной густотой стояния растений // Масличные культуры. – 2019. – Вып. 2 (178). – С. 47–54.
8. Норов М.С. Влияние густоты стояния растений и дозы удобрений на продуктивность подсолнечника // Масличные культуры. – 2019. – Вып. 4 (180). – С. 50–52.
9. Григулецкий В.Г. Обоснование эмпирической формулы Пустовойта-Дьякова, определяющей оптимальный фенотип подсолнечника по урожайности // Масличные культуры. – 2021. – Вып. 1 (185). – С. 3–9.
10. Par P.-F. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Correspondance Mathematique et Phisique. Paris. – Leipzig, 1838. – Vol. X. – P. 113–121.
11. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 184 с.
12. Григулецкий В.Г. Математическая модель взаимодействия растительных сообществ. Часть I // Московский экономический журнал. – 2018 – № 5: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://qje.su/ekonomicheskaya-teoriya/moskovskij-ekonomicheskij-zhurnal-5-2018-85>.
13. Григулецкий В.Г. Математическая модель взаимодействия растительных сообществ. Часть II // Московский экономический журнал. – 2018. – № 5: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://qje.su/ekonomicheskaya-teoriya/moskovskij-ekonomicheskij-zhurnal-5-2018-86>.
14. Митчерлих Э.А. Потребность почвы в удобрении. Практическое применение в земледелии закона действия факторов роста. – М.-Л.: Госиздат, 1928. – 70 с.
15. Митчерлих Э.А. Определение потребности почвы в удобрении. – М.-Л.: Госиздат сельскохозяйственной и колхозно-кооперативной литературы, 1931. – 104 с.
16. Митчерлих Э.А. Почвоведение. – М.: ИЛ, 1957. – 416 с.
17. Домонтович М.К. «Закон минимума» Либиха и «закон действия факторов роста» Митчерлиха // Опытное поле Петровской Сельскохозяйственной Академии. – 1922. – Бюллетень № 31. – 24 с.
18. Курсанов А.Т. Теория Митчерлиха, ее анализ и практическое применение. – М.-Л.: СельхозГИЗ, 1930. – 200 с.

19. Перегудов В.Н. Совместное действие нескольких факторов, теория Митчерлиха и правило Риппеля // Труды Научного института по удобрениям имени Я.В. Самойлова. – 1933. – Вып. 93. – С. 258–303.

#### References

1. Podsolnechnik: monografiya / Pod obshchey red. akademika V.S. Pustovoyta. – M.: Kolos, 1975. – 591 s.

2. Pustovoyt V.S., D'yakov A.B. Urozhaynost' podsolnechnika na sodержание belka v semenakh // Vestnik sel'skokhozyaystvennoy nauki. – 1972. – № 7. – S. 11–15.

3. D'yakov A.B., Sharygina M.L., Vasil'eva T.A. Vzaimodeystvie genotip – sreda po priznakam produktivnosti i kachestva semyanok podsolnechnika // NTI VNIIMK. – 2001. – Вып. 125. – S. 34–50.

4. D'yakov A.B. Kharakter zavisimosti urozhaya semyan ot ploshchadi pitaniya rasteniy podsolnechnika // Byulleten' NTI po maslichnym kul'turam VNIIMK. – 1969. – № 3. – S. 71–75.

5. D'yakov A.B., Bekhter A.G. Reaktsiya rasteniy podsolnechnika na pogodnye usloviya v zavisimosti ot gustoty poseva // Sbornik nauchnykh trudov VNIIMK imeni V.S. Pustovoyta «Voprosy fiziologii maslichnykh rasteniy v svyazi s zadachami selektsii i agrotekhniki». – 1975. – S. 47–52.

6. Tishkov N.M., Borodin S.G. Produktivnost' sortov konditerskogo podsolnechnika v zavisimosti ot gustoty stoyaniya rasteniy // Nauch.-tekh. byul. VNIIMK. – 2009. – Вып. 1 (140). – S. 57–64.

7. Lukomets V.M., Tishkov N.M. Urozhaynost' i kachestvennye pokazateli krupnoy fraktsii semyan pri vyrashchivanii sortov konditerskogo podsolnechnika s raznoy gustotoy stoyaniya rasteniy // Maslichnye kul'tury. – 2019. – Вып. 2 (178). – S. 47–54.

8. Norov M.S. Vliyanie gustoty stoyaniya rasteniy i dozy udobreniy na produktivnost' podsolnechnika // Maslichnye kul'tury. – 2019. – Вып. 4 (180). – S. 50–52.

9. Griguletskiy V.G. Obosnovanie empiricheskoy formuly Pustovoyta-D'yakova, opredelyayushchey optimal'nyy fenotip podsolnechnika po urozhaynosti // Maslichnye kul'tury. – 2021. – Вып. 1 (185). – S. 3–9.

10. Par P.-F. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Correspondance Mathematique et Phisique. Paris. – Leipzig, 1838. – Vol. X. – R. 113–121.

11. Riznichenko G.Yu. Matematicheskie modeli v biofizike i ekologii. – Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2003. – 184 s.

12. Griguletskiy V.G. Matematicheskaya model' vzaimodeystviya rastitel'nykh soobshchestv. Chast' I // Moskovskiy ekonomicheskij zhurnal. – 2018. – № 5: [Elektronnyy resurs]. – Rezhim dostupa: <https://qje.su/ekonomicheskaya-teoriya/moskovskij-ekonomicheskij-zhurnal-5-2018-85>.

13. Griguletskiy V.G. Matematicheskaya model' vzaimodeystviya rastitel'nykh soobshchestv. Chast' II // Moskovskiy ekonomicheskij zhurnal. – 2018. – № 5: [Elektronnyy resurs]. – Rezhim dostupa: <https://qje.su/ekonomicheskaya-teoriya/moskovskij-ekonomicheskij-zhurnal-5-2018-86>.

14. Mitcherlikh E.A. Potrebnost' pochvy v udobrenii. Prakticheskoe primenenie v zemledelii zakona deystviya faktorov rosta. – M.-L.: Gosizdat, 1928. – 70 s.

15. Mitcherlikh E.A. Opredelenie potrebnosti pochvy v udobrenii. – M.-L.: Gosizdat sel'skokhozyaystvennoy i kolxozno-kooperativnoy literatury, 1931. – 104 s.

16. Mitcherlikh E.A. Pochvovedenie. – M.: IL, 1957. – 416 s.

17. Domontovich M.K. «Zakon minimuma» Libikha i «zakon deystviya faktorov rosta» Mitcherlikha // Opytnoe pole Petrovskoy Sel'skokhozyaystvennoy Akademii. – 1922. – Byulleten' № 31. – 24 s.

18. Kirsanov A.T. Teoriya Mitcherlikha, ee analiz i prakticheskoe primenenie. – M.-L.: Sel'khozGIZ, 1930. – 200 s.

19. Peregudov V.N. Sovmestnoe deystvie neskol'kikh faktorov, teoriya Mitcherlikha i pravilo Rippelya // Trudy Nauchnogo instituta po udobreniyam imeni Ya.V. Samoylova. – 1933. – Вып. 93. – S. 258–303.

#### Сведения об авторах

**В.Г. Григулецкий**, д-р тех. наук, профессор

*Получено/Received*

13.10.2021

*Получено после рецензии/Manuscript peer-reviewed*

27.10.2021

*Получено после доработки/Manuscript revised*

09.11.2021

*Принято/Accepted*

16.11.2021

*Manuscript on-line*

30.12.2021